第13卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 No. 2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr. 1992

具有给定色数的互补图的实现*

王 志 雄

(管理信息科学系)

摘要 本文给出关于三元组$(p;m,n)$的充分必要条件，在此条件下，存在p点的图G，使图G及其补图$\overline{G}$的点色数(或边色数)分别是m和n.

关键词 图，染色，色数

0 引言

本文使用术语和符号同文[1]，并假设文中出现的图都是简单图. 图G的补图记为$\overline{G}$.

设p是正整数，m和n是非负整数，三元组$(p;m,n)$称为点染色可实现的，如果存在p阶图G，使$\chi(G)=m$，$\chi(\overline{G})=n$. 类似的，称三元组$(p;m,n)$为边染色可实现的，如果存在p阶图G，使$\chi'(G)=m$，$\chi'(\overline{G})=n$.

首先，不难验证定理1.

定理1 三元组$(p;m,n)$是点(或边)染色可实现的，当且仅当$(p;n,m)$是点(或边)染色可实现的.

由文[2](定理1.11和1.25)我们有，对任一个p阶图G，

$$2\sqrt{p}\leqslant\chi(G)+\chi(\overline{G})\leqslant p+1, \tag{1}$$

$$p\leqslant\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})\leqslant\frac{1}{4}(p+1)^2, \tag{2}$$

$$2\left[\frac{p+1}{2}\right]-1\leqslant\chi'(G)+\chi'(\overline{G})\leqslant p-2+2\left[\frac{p}{2}\right],\quad(p\geqslant2), \tag{3}$$

$$0\leqslant\chi'(G)\chi'(\overline{G})\leqslant(p-1)\left(2\left[\frac{p}{2}\right]-1\right) \tag{4}$$

$$\chi'(G)\leqslant\chi'(k_p)=2\left[\frac{p+1}{2}\right]-1). \tag{5}$$

从而，立得三元组$(p;m,n)$是点染色可实现的、必要条件是

本文1991-01-26收到.

* 福建省自然科学基金会资助课题.

$$m+n-1\leqslant p\leqslant mn, \tag{6}$$

而三元组$(p;m,n)$是边染色可实现的，必要条件是

$$\max(m,n)\leqslant 2\left[\frac{p+1}{2}\right]-1\leqslant m+n\leqslant p-2+2\left[\frac{p}{2}\right],\quad (p\geqslant 2). \tag{7}$$

我们在本文第1节将证明：条件(6)对于三元组$(p;m,n)$为点染色可实现也是充分的.但是正如第2节所指出，条件(7)对于三元组$(p;m,n)$为边染色可实现是不充分的，我们将给出边染色可实现的三元组的充分必要条件.

1 点染色的实现

定理2 三元组$(p;m,n)$是点染色可实现的，当且仅当p,m,n是正整数且满足条件(6).

证 条件(6)的必要性由式(1)和(2)立得.为证明充分性，只要对满足条件(6)的正整数p,m,n，构造p阶图G使$\chi(G)=m,\chi(\overline{G})=n$.首先考虑满足条件

$$1\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_m=n, \tag{8}$$

$$r_1+r_2+\cdots+r_m=p \tag{9}$$

[illegible]数组$(r_1,r_2,\cdots,r_m)$由条件(6)，至少有一数组满足上述条件，比如，令

$$r_i=\begin{cases}1 & ,\text{当 } 1\leqslant i\leqslant m-s-1,\\ t+1, & \text{当 } i=m-s,\\ n & ,\text{当 } m-s+1\leqslant i\leqslant m,\end{cases}$$

其中，$s=\left[\frac{p-m}{n-1}\right]$($n=1$时，$s$可取任何值)，$t=p-m-s(n-1)$，那么，数组$(r_1,r_2,\cdots,r_m)$满足条件(8)和(9).

取图G为完全m-分图$K_{r_1,r_2,\cdots,r_m}$，则$\chi(G)=m,\chi(\overline{G})=n$.证毕.

推论3 对任意正整数m,n，存在图G使$\chi(G)=m,\chi(\overline{G})=n$.

证 因$mn-(m+n-1)=(m-1)(n-1)\geqslant 0$，故存在正整数$p$使条件(6)成立，由定理2立得.

2 边染色实现

引理4(Plantholt,[3]) 图G有$(2k+1)$个顶点，且$\Delta(G)=2k$，则$|E(G)|\leqslant 2k^2$的充分必要条件是$\chi'(G)=2k$.

定理5 设图G有$(2k+1)$个顶点，且$\chi'(G)=2k+1$，则$\chi'(\overline{G})\leqslant k-1$.

证 因$\chi'(G)=2k+1>2k\geqslant\Delta(G)$，又由Vizing定理，$\Delta(G)\geqslant\chi'(G)-1=2k$，即$\Delta(G)=2k$.由引理4，$|E(G)|>2k^2$，故$|E(\overline{G})|\leqslant k-1$，从而，$\chi'(\overline{G})\leqslant k-1$.

注 当$p=2k+1,m=2k+1,n=k(k\geqslant 2)$时，条件(7)成立.但由定理5，三元组$(p;m,n)$不是边染色可实现的.

定理6 三元组$(p;m,n)$是边染色可实现的，充分必要条件是：(i)当$p=1$时，$m=n=0$；(ii)当$p=2$时，$m=0,n=1$或$m=1,n=0$；(iii)当$p\geqslant 3$时，条件(7)成立且若$p=m=2k+1$时，$n\leqslant k-1$；若$p=n=2k+1$时，$m\leqslant k-1$.

证　情况(i)和(ii)的正确性是显然的. 当 $p\geqslant 3$ 时, 必要性由式(3), (4)及定理 5 立得. 下面, 利用构造方法证明充分性, 由定理 1, 不妨假设 $m\leqslant n$, 并分四种情况讨论.

情况 1　若 $p=2k$ 是偶数且 $m+n=4k-2$, 则 $m=n=2k-1$. 取 $G=K_{2k-1}\cup K_1$, 那么, $x'(G)=x'(\bar{G})=2k-1$.

情况 2　若 $p=2k$ 但 $m+n<4k-2$, 则已知条件即 $m\leqslant n\leqslant 2k-1\leqslant m+n<4k-2$. 因 $x'(K_{2k})=2k-1$, 故 $E(K_{2k})$ 可分成 $(2k-1)$ 个匹配 $M_1, M_2, \cdots, M_{2k-1}$. 任取一点 $v_0\in V(K_{2k})$. 不失一般性, 设 $v_0v_i\in M_i(1\leqslant i\leqslant 2k-1)$. 设 G 是 K_{2k} 的以 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}M_i-\{v_0v_i,\cdots,v_0v_j\}$ 为边集的生成子图, 其中, $j=m+n-2k+1$, 则 $m\geqslant x'(G)\geqslant\Delta(G)=m$, 即 $x'(G)=m$. 另一方面, $E(\bar{G})=\bigcup\limits_{i=m+1}^{2k-1}M_i\cup\{v_0v_i,\cdots,v_0v_j\}$, 故 $x'(\bar{G})\leqslant 2k-1-m+j=n$. 但 $x'(\bar{G})\geqslant\Delta(\bar{G})=d(v_0)=n$, 即 $x'(\bar{G})=n$.

情况 3　若 $p=2k+1(k\geqslant 1)$ 是奇数, $n\leqslant 2k$, 则 $m\leqslant n<2k+1\leqslant m+n\leqslant 4k-1$. 因 $x'(K_{2k+1})=2k+1$, 故 $E(K_{2k+1})$ 可分成 $(2k+1)$ 个匹配 $M_0, M_1, \cdots, M_{2k}$. 每个匹配都恰含 k 条边, 每个顶点恰对某一个 i 是 Mi^- 不饱和的, 不妨设点 i 是 Mi^- 不饱和点 $(0\leqslant i\leqslant 2k)$.

对任一点 $i\neq 0$, 若边 $oi\in M_j$, 则令 $a(i)=j$. 由上一段所述, $a(i)\neq 0$, $a(i)\neq i$, 且因诸 M 是匹配, 故仅当 $i=j$ 时, $a(i)=a(j)$. 即 a 是 $\{1,2,\cdots,2k\}$ 的一个置换, 故 a 可表成不交的循环置换 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 的积([4], p. 151). 设 $a_i=(r_i(1),\cdots,r_i(t_i))$, 令 $s=m+n-2k-1$, e 满足条件

$$t_1+t_2+\cdots+t_{e-1}<s,$$
$$t_1+t_2+\cdots+t_{e-1}+t_e\geqslant s.$$

令 $h=s-t_1-t_2-\cdots-t_{e-1}$, 则 $1\leqslant h\leqslant t_e$. 现在, 构造 p 阶图 G 如下: $E(\bar{G})$ 由 $(s+1)$ 个匹配 M_0, $M_{r_1(2)}-or_1(1),\cdots,M_{r_1(t_1)}-or_1(t_1-1), M_{r_1(1)}-or_1(t_1),\cdots,M_{r_{e-1}(2)}-or_{e-1}(1),\cdots,M_{r_{e-1}(1)}-or_{e-1}(t_{e-1}), M_{r_e(2)}-or_e(1),\cdots,M_{r_e(h+1)}-or_e(h)$ (这儿, 若 $h=t_e$, 则令 $r_e(h+1)=r_e(1)$) 和 $(n-s-1)$ 个其它的匹配 M_i (这儿, 若 $h<t_e$, 则必须选 $M_{r_e(1)}$ 做为这 $(n-s-1)$ 个匹配之一)的边组成. 因 $n<2k+1$, 故至少有一个点 v, 对这 n 个匹配都是饱和的, 即 $d_{\bar{G}}(v)=n$, 故 $x'(\bar{G})=n$.

在图 G 中, 点 o 的度是 $2k+1-n+s=m$, $E(G)$ 由 $(m-s)$ 个匹配的边和 s 条边 $or_1(1),\cdots,or_e(h)$ 组成, 故 $x'(G)=m$.

情况 4　若 $p=n=2k+1$ 且 $m\leqslant k-1$. 构造图 G 如下: $V(G)=\{v_0,v_1,\cdots,v_{2k}\}$, $E(G)=\{v_0v_1,\cdots,v_0v_m\}$, 显然, $x'(G)=m$, 图 $\bar{G}$ 有 $k(2k+1)-m\geqslant 2k^2+1$ 条边, 故 $x'(\bar{G})=2k+1$. 完全证毕.

推论 7　对任何非负整数 m, n, 除 $(m,n)=(1,1),(0,2k),(2k,0)(k>0)$ 之外, 存在图 G, 使 $x'(G)=m$, $x'(\bar{G})=n$.

参　考　文　献

[1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Macmillan Press LTD, (1981).

[2] Capobianco, M. and Molluzzo, J., *Examples and Counterexamples in Graph Theory*, Elsevier North-Holland, Inc., (1978).

[3] Plantholt, M., *Journal of Graph Theory*, 5(1981), 45－53.

[4] Birkhoff, G. and Maclane, S., *A Survey of Mordern Algebra*, 4 th ed., the Macmillan Press, New York, (1977).

The Realization of the Graph and Its Complement with Given Chromatic Numbers

Wang Zhixiong
(*Department of Applied Mathematics*)

Abstract The necessary and sufficient conditions of the triple p, m, n are given in this paper. Under these conditions there exists graph G of such a vertex p that the vertex-chromatic (or edge-chromatic) numbers of graph G and its complement $\bar{G}$ are bound to be m and n respectively.

Key words graph, coloring, chromatic number