第17卷 第4期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 17 No. 4
1996年10月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 1996

关于图的星色函数*

王　志　雄

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要　图的星色函数是研究星染色的一个重要函数．给出几种重要图类的星色函数，讨论星色函数的一些基本性质，提出几个值得进一步研究的问题．

关键词　图，染色，色多项式

分类号　O 157.5

本文只考虑无向的有限简单图．未加说明的术语与符号见文[1]．设 k 是正整数，$\langle k\rangle$ 表示集合 $\{0,1,\cdots,k-1\}$．对一切 $x,y\in\langle k\rangle$，令 $|x-y|_k=\min\{|x-y|,k-|x-y|\}$．设 k,d 是正整数，$k\geqslant 2d$，图 G 的一个 (k,d)-星染色，指的是 $V(G)$ 到 $\langle k\rangle$ 的一个映射 c，使得对一切 $uv\in E(G)$，恒有 $|c(u)-c(v)|_k\geqslant d$[2,3]．图 G 的不同 (k,d)-星染色的方法数记为 $\pi^*(G,k,d)$，称为图 G 的星色函数．对于非空图 G，$\inf\{k/d:\pi^*(G,k,d)>0,k\geqslant 2d>0\}$ 称为图 G 的星色数，记为 $\chi^*(G)$．显然，图 G 的 $(k,1)$-星染色即其正常染色，故 $\pi^*(G,k,1)$ 即图 G 的色多项式．以此而论，星染色、星色函数、星色数，分别是正常染色、色多项式、色数的推广．通过星色函数研究图的星染色、星色数与色多项式，无疑地，是有意义的．

1　若干图类的星色函数

定理1　设 K_n 是 n 阶完全图，则当 $k\geqslant nd$ 时

$$\pi^*(K_n,k,d)=k(k-nd+n-1)(k-nd+n-2)\cdots(k-nd+1).$$

证　设 $V(K_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$c$ 是图 K_n 的一个 (k,d)-星染色，则 $c(v_n)=r$ 有 k 种不同的选择．

对 r 的每一选择，$c(v_1),c(v_2),\cdots,c(v_{n-1})$ 的选择方法数是一样，故不妨只考虑 $r=0$ 的情况．这时，$c(v_1),c(v_2),\cdots,c(v_{n-1})$ 取自 $d,d+1,\cdots,k-d$．这 $(n-1)$ 个数从小到大排列是 $r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}$．令 $t_1=r_1,t_2=r_2-(d-1),\cdots,t_{n-1}=r_{n-1}-(n-2)(d-1)$，则当且仅当 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$ 是 $d,d+1,\cdots,k-d-(n-2)(d-1)$ 中的 $(n-1)$ 个不同的数时，c 是 K_n 的一个 (k,d)-星染色．因此，$r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}$ 有 $\binom{k-2d+1-(n-2)(d-1)}{n-1}$ 种选取法，从而 $c(v_1),c(v_2),\cdots,c(v_{n-1})$ 有

$$(n-1)!\binom{k-2d+1-(n-2)(d-1)}{n-1}$$
$$=(k-nd+n-1)(k-nd+n-2)\cdots(k-nd+1)$$

* 本文1996-02-27收到；福建省自然科学基金资助项目

种选取法．证毕．

定理2 设 K_n-e 是从 K_n 中去一边 e 得到的图，则当 $k\geqslant(n-1)d$ 时

$$\frac{\pi^*(K_n-e,k,d)}{k(n-2)!}=\binom{k-(n-1)d+n-2}{n-1}+\binom{k-(n-1)d+n-1}{n-1}+(n-3)\binom{k-n(d-1)-1}{n-1}.$$

证 设 $V(K_n-e)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$e=u_{n-1}u_n$，$c$ 是 K_n-e 的一个 (k,d)-星染色，则 $c(u_n)\in\langle k\rangle$ 有 k 种不同的选择．如定理1，我们不妨只考虑 $c(u_n)=0$ 的情况，并设 $c(u_{n-1})=h(0\leqslant h\leqslant k-1)$.

(1) 若 $0\leqslant h\leqslant 2d-1$ 或 $k-2d+1\leqslant h\leqslant k-1$，则 $c(u_1),\cdots c(u_{n-2})$ 分别取自 $\{h+d,h+d+1,\cdots,k-d\}$ 或 $\{d,d+1,\cdots,h-d\}$，且满足条件

$$|c(u_r)-c(u_t)|_k\geqslant d,(1\leqslant r<t\leqslant n-2). \tag{1}$$

如定理1之证明，选取的方法数分别是

$$(n-2)!\binom{k-(n-1)(d-1)-h-1}{n-2}\text{或}(n-2)!\binom{k-(n-1)(d-1)-1}{n-2}.$$

(2) 若 $2d\leqslant h\leqslant k-2d$，则 $c(u_1),\cdots,c(u_{n-2})$ 分别取自 $\{d,d+1,\cdots,h-d\}\cup\{h+d,h+d+1,\cdots,k-d\}$，且条件(1)成立．有 i 个取自 $\{d,d+1,\cdots,h-d\}$，另 $(n-2-i)$ 个取自 $\{h+d,h+d+1,\cdots,k-d\}$ 的选取方法数是

$$(n-2)!\binom{h-2d+1-(i-1)(d-1)}{i}\binom{h-2d-h+1-(n-3-i)(d-1)}{n-2-i}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi^*(K_n-e,k,d)}{k(n-2)!}\\
&=\sum_{h=0}^{2d-1}\binom{k-(n-1)(d-1)-h-1}{n-2}\\
&\quad+\sum_{h=k-2d+1}^{k-1}\binom{h-(n-1)(d-1)-1}{n-2}\\
&\quad+\sum_{h=2d}^{k-2d}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{h-2d+1-(i-1)(d-1)}{i}\\
&\quad\times\binom{k-2d-h+1-(n-3-i)(d-1)}{n-2-i}\\
&=\binom{k-(n-1)(d-1)}{n-1}-\binom{k-(n-1)(d-1)-1-(2d-1)}{n-1}\\
&\quad+\binom{k-(n-1)(d-1)-1}{n-1}-\binom{k-(2d-1)-(n-1)(d-1)-1}{n-1}\\
&\quad+(n-3)\binom{k-n(d-1)-1}{n-1}+2\binom{k-(n+1)d+n-1}{n-1}\\
&=\binom{k-(n-1)d+n-2}{n-1}+\binom{k-(n-1)d+(n-1)}{n-1}\\
&\quad+(n-3)\binom{k-n(d-1)-1}{n-1}.
\end{aligned}$$

证毕.

定理3 设C_4是长为4的圈,则当$k\geqslant 2d$时

$$\pi^*(C_4,k,d)=4k\binom{k-2d+2}{3}+2k\binom{k-4d+3}{3}+k(k-2d+1).$$

证 设$V(C_4)=\{A,B,C,D\}$,$E(C_4)=\{AB,BC,CD,DA\}$.不妨再设$c(A)=0$,$c(C)=i\in\langle k\rangle$,则有

(1) 若$i=0$,$c(B)$,$c(D)$可独立地从$(k-2d+1)$个数$d,d+1,\cdots,k-d$中选取.

(2) 若$1\leqslant i\leqslant 2d-1$(或$k-2d+1\leqslant i\leqslant k-1$),$c(B)$,$c(D)$可独立地从$(k-2d-i+1)$个数$i+d,i+d+1,\cdots,k-d$(或从$(i-2d+1)$个数$d,d+1,\cdots,i-d$)中选取.

(3) 若$2d\leqslant i\leqslant k-2d$(当然,这仅当$k\geqslant 4d$才有可能.当$k<4d$,这种情况的选取方法数为零),$c(B)$,$c(D)$可独立地从$d,d+1,\cdots,i-d;i+d;,i+d+1,\cdots,k-d$这$(k-4d+2)$个数中选取.从而,使$c(A)=0$的$(k,d)$-星染色方法数为

$$(k-2d+1)^2+2\sum_{i=1}^{2d-1}(k-2d-i+1)^2+\sum_{i=2d}^{k-2d}(k-4d+2)^2$$

$$=4\binom{k-2d+2}{3}+2\binom{k-4d+3}{3}+(k-2d+1).$$

证毕.

2 星色函数的性质

定理4 若图G与H的交为K_1,则

$$\pi^*(G\cup H,k,d)=\pi^*(G,k,d)\pi^*(H,k,d)/k.$$

证 设$V(G)\cap V(H)=\{v\}$,则$G\cup H$的每一种(k,d)-星染色c,导出图G与H的(k,d)-星染色c_1,c_2为

$$c_1(u)=c(u)\quad(u\in V(G)),$$
$$c_2(u)=c(u)\quad(u\in V(H)).$$

显然,$c_1(v)=c_2(v)$.

反之,图G与H的(k,d)-星染色c_1,c_2能以自然方式组合成$G\cup H$的一种(k,d)-星染色,当且仅当$c_1(v)=c_2(v)$.得证.

推论1 设T_n是有n个点的树,则当$k\geqslant 2d$时

$$\pi^*(T_n,k,d)=k(k-2d+1)^{n-1}.$$

推论2 图G有割边e,图$G-e$的分支是H_1,H_2则

$$\pi^*(G,k,d)=\frac{1}{k}(k-2d+1)\pi^*(H_1,k,d)\cdot\pi^*(H_2,k,d).$$

定理5 若图G存在(k,d)-星染色,则星色函数$\pi^*(G,k,d)$含因式k,即$k=0$是函数$\pi^*(G,k,d)$之一零点.

证 若图G存在(k,d)-星染色,把所有这些星染色如下分类:图G的(k,d)星染色c_1,c_2属同一类,当且仅当存在整数t,使得对一切$u\in V(G)$,恒有$c_1(u)\equiv c_2(u)+t(\mathrm{mod}\ k)$.显然,这一分类是等价分类,且任一非空类恰含图G的k个(k,d)-星染色.从而,k是星色函数$\pi^*(G,k,$

d)的一个因式. 证毕.

推论3 若图 G 有 t 个分支,则 $k=0$是函数 $\pi^*(G,k,d)$的至少 t 重的零点.

从 V(G)到$\langle k\rangle$的映射 c,使得对一切 $uv\in E(G)$,恒有$|c(u)-c(v)|\geqslant d$,映射 c 称为是图 G 的一个(k,d)-准星染色. 图 G 的不同(k,d)-准星染色的方法数记为 $\pi'(G,k,d)$.

显然,图 G 的(k,d)-星染色必是准星染色,故 $\pi^*(G,k,d)\leqslant\pi'(G,k,d)$. 图 G 的$(k,1)$-准星染色为正常染色,故 $\pi^*(G,k,1)=\pi'(G,k,1)$是图 G 的色多项式.

例1 设 C_4是长为4的圈,则

$$\pi'(C_4,k,d)=8\binom{k-d+2}{4}+2\binom{k-d+1}{2}+8\binom{k-2d+2}{4}+4\binom{k-2d+2}{3}+8\binom{k-3d+3}{4}.$$

证 由图 C_4的任一(k,d)-准星染色,如下导出 C_4的一个定向:若 $uv\in E(C_4)$,$c(u)>c(v)$,则边 uv 以 u 为起点,v为终点.

使 C_4仅有长为1的有向路的(k,d)-准星染色数是$8\binom{k-d+2}{4}+2\binom{k-d+1}{2}$;使 C_4有长为2的有向路但没有长为3的有向路的准星染色数是$8\binom{k-2d+2}{4}+4\binom{k-2d+2}{3}$;使 C_4有长为3的有向路的准星染色数是$8\binom{k-3d+3}{4}$. 证毕.

定理6 图 $G\vee K_1$为图 G 与 K_1的联图,则 $\pi^*(G\vee K_1,k,d)=k\pi'(G,k-2d+1,d)$.

证 设 $V(K_1)=v$,c 是图 $G\vee K_1$的一个(k,d)-星染色,$c(v)=i$,对任何 $u\in V(G)$,令

$$c'(u)\equiv c(u)-(i+d)(\bmod k),$$
$$0\leqslant c'(u)\leqslant k-2d,$$

则 c'是图 G 的一个$(k-2d+1,d)$-准星染色.

上述对应是图 G 的$(k-2d+1,d)$-准星染色 c_1与图 $G\vee K_1$的使 $c(v)=i$ 的(k,d)-星染色 c 的一一对应. 得证.

例2 设 W_4是有4条辐的轮图,则

$$\pi^*(W_4,k,d)=8k\binom{k-3d+3}{4}+2k\binom{k-3d+2}{2}+8k\binom{k-4d+3}{4}+4k\binom{k-4d+3}{3}+8k\binom{k-5d+4}{4}.$$

证 由例1与定理6立得.

3 注记

由定理1与推论1可知,当 $k/d\geqslant\chi^*(K_n)$或 $\chi^*(T_n)$时,星色函数 $\pi^*(K_n,k,d)$与 $\pi^*(T_n,k,d)$均为 k 与 d 的多项式;但是,由定理2与3,$\pi^*(K_n-e,k,d)$与 $\pi^*(C_4,k,d)$,当 $k/d\geqslant\chi^*(K_n-e)$,与 $\chi^*(C_4)$时,不是 k 与 d 的多项式.

$\pi^*(K_n-e,k,d)$在区域$(n-1)d\leqslant k<nd$,$nd\leqslant k<(n+1)d$ 与 $k\geqslant(n+1)d$ 的每一个中均为多项式;$\pi^*(C_4,k,d)$在区域$2d\leqslant k<4d$ 与 $k\geqslant 4d$ 的每一个中均为多项式.

问题1　是否对于每一个整数 $t\geqslant\chi^*(G)$，$\pi^*(G,k,d)$ 在区域 $td\leqslant k<(t+1)d$ 中，都是多项式？

问题2　若问题1的回答是有肯定的，多项式系数有何图论意义？

由本文给出的一些图的星色函数，对推论3可进一步提出.

猜测1　图 G 有 t 个分支，则 $k=0$ 是函数 $\pi^*(G,k,d)$ 的 t 重零点.

问题3　寻找星色函数的较为简单实用的递推式.

这个问题的研究是十分重要的. 熟知、寻找一般图的色多项式可借助于递推式：

$$\pi(G,k)=\pi(G-e,k)-\pi(G\cdot e,k),$$

其中 $r\in E(G)$，在定理4，5，6仅给出特殊图类的星色函数递推式，因而一般图的星色函数的确定依然是一个困难的问题.

参　考　文　献

1　Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications. New York: The Macmillan Press LTD, 1976. 12～52

2　Vince A. Star chromatic number. J. Graph Theory, 1988, 12: 551～559

On the Star Chromatic Function of Graph

Wang Zhixiong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　Star chromatic function is an important function for the study of star colouring. The author gives here the star chromatic functions of several important graphs; and discusses some basic properties of star chromatic function; and proposes several problems deserving further study.

Keywords　graph, colouring, chromatic polynominal