第 34 卷 第 1 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 34 No. 1
2013 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2013

文章编号: 1000-5013(2013)01-0100-06

几类极图谱半径序列的极限

田路路，宋海洲，汪秋分

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 讨论几类极图谱半径序列的极限问题，给出 n 个顶点的路 P_n 和回路 C_n 的拉普拉斯谱半径在 n 递增时的极限，以及在最大度为 Δ 的 n 个顶点的树中、邻接谱半径最小的树和邻接谱半径最大的树的邻接谱半径在 Δ 固定 n 递增时的极限.

关键词： 图；几乎完全满度树；完全满度树；谱半径；极限

中图分类号： O 157.5 **文献标志码：** A

1 预备知识

设 $G=(V,E)$ 是具有 n 个顶点和 m 条边的图[1]. 其中：V 和 E 分别为 G 的顶点集和边集，$|V|=n$. d_{v_i} 表示 G 中顶点 v_i 的度，$\Delta(G)$ 表示 G 中顶点的最大度，即图 G 的最大度.

记 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)=(a_{i,j})_{n\times n}$. 其中：若 $(i,j)\in E$，则 $a_{i,j}=1$；否则，$a_{i,j}=0$. 矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值的模的最大值称为 G 的邻接谱半径，记作 $\rho(G)$.

矩阵 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$，为图 G 的拉普拉斯矩阵，$\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}(d_{v_1},d_{v_2},\cdots,d_{v_n})$. 显然，$\boldsymbol{L}(G)$ 为半正定的，故 $\boldsymbol{L}(G)$ 的最大特征值等于 $\boldsymbol{L}(G)$ 的谱半径，记作 $\mu(G)$，称 $\mu(G)$ 为 G 的拉普拉斯谱半径.

令 $T=(V,E)$ 是以 V 为顶点集的树．类似的，文中记树 T 的邻接谱半径为 $\rho(T)$，拉普拉斯谱半径为 $\mu(T)$，$\Delta(T)=\Delta$ 为 T 的最大度.

2 基本定义及引理

定义 1 若一个根树 T 中的每个内部节点(即度大于 1 的节点)的度都为 Δ，则称这个根树 T 为满 Δ 度树.

定义 2 若一个根树 T 是满 Δ 度树，且所有叶子有相同的深度，则称这种根树 T 为完全满 Δ 度树.

定义 3 若一个根树 T 除了最右边位置上的一个或者几个叶子可能缺少外，它是丰满的，称它为几乎完全满 Δ 度树．即一个树 T 或是完全满 Δ 度树或为另一个完全满 Δ 树 T_1 去掉最右边的一个或几个叶子得到的子树，则称 T 为几乎完全满 Δ 度树.

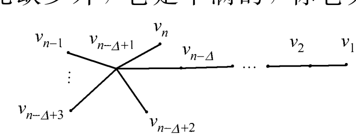

图 1 最大度 Δ 的 $T^{\min}_{n,\Delta}$ 树

Fig. 1 $T^{\min}_{n,\Delta}$ is a tree with the maximum degree Δ

引理 1[2] 在最大度为 Δ 的 n 个顶点的树中，图 1 中的树的邻接谱半径最小. 记此树为 $T^{\min}_{n,\Delta}$，其中 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $T^{\min}_{n,\Delta}$ 中的顶点.

引理 2 在最大度为 Δ 的 n 个顶点的树中，n 个顶点对应的几乎完全满 Δ 度树是邻接谱半径最大的树，记为 $T^{\max}_{n,\Delta}$.

引理 3[3] 设 G 是一个简单的连通图，$G=(V,E)$，其中 V 为 G 的顶点集，$|V|=n$，E 是 G 的边集，且 $w\notin V$，$v\in V$，令 $G'=G+vw$，则 $\mu(G')\geqslant\mu(G)$.

引理 4[3] 设 G 是一个简单的连通图，$G=(V,E)$，其中 V 为 G 的顶点集，$|V|=n$，E 是 G 的边集，

收稿日期： 2012-01-22

通信作者： 宋海洲(1971-)，男，副教授，主要从事运筹优的研究. E-mail: hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目： 华侨大学科研基金资助项目(10HZR26)

且 $u\in V, v\in V$，但 $(u,v)\notin E$，令 $G'=G+uv$，则 $\mu(G')\geqslant\mu(G)$.

引理 5[4]　设 $\boldsymbol{A}$ 是阶数为 n 的非负矩阵，且有 $R_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}$，$r=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}R_i$，$R=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}R_i$，则有 $r\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant R$.

引理 6[5]　设 P_n 为 n 个顶点的路，则 P_n 的邻接谱半径为 $\rho(P_n)=2\cos\dfrac{\pi}{n+1}$.

引理 7[6]　设 $T=(V,E)$ 为 n 个顶点的树，V 为 T 的顶点集，$|V|=n$，且 $u\in V, w\notin V$，令 $T'=T+uw$，则 $\rho(T')>\rho(T)$.

引理 8[4]　设 $T=(V,E)$ 为 n 个顶点的树（图 2），V 为 T 的顶点集，则 T 的邻接谱半径 $\rho(T)=2$.

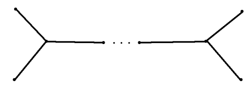

图 2　n 个顶点的 T 树

Fig. 2　T is a tree with n vertices

引理 9[7]　若根树 T 是一个层数为 k 的树（T 的层数 k 定义为 T 的高度加 1），且根树 T 的每一层顶点有相同度数，记 T 的邻接矩阵为 $\boldsymbol{A}(T)$. d_{k-j+1} 和 n_{k-j+1} 分别表示根树 T 的第 j（$j=1,2,\cdots,k$）层的度数和顶点数，其中 $n_k=1$. 设 $\boldsymbol{R}_k$ 为对称三对角阵，有

$$\boldsymbol{R}_k=\begin{bmatrix}0&\sqrt{d_2-1}&0&\cdots&&0\\ \sqrt{d_2-1}&0&\sqrt{d_3-1}&&&\vdots\\ 0&\sqrt{d_3-1}&&&&\\ \vdots&&&&\sqrt{d_{k-1}-1}&0\\ &&&\sqrt{d_{k-1}-1}&0&\sqrt{d_k-1}\\ 0&\cdots&&0&\sqrt{d_k-1}&0\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{R}_k$ 的最大特征值就是 $\boldsymbol{A}(T)$ 的最大特征值.

引理 10[8]　设 $T=(V,E)$ 是一个根树，V 为树 T 的顶点集，$v_1\in V, v_2\in V$ 且 $v\in V,(v,v_1)\in E,(v,v_2)\in E$ 且 $d_{v_1}=d_{v_2}=1$，令 $T'=T-vv_1+v_2v_1$，则 $\rho(T)>\rho(T')$.

3　主要结果及证明

定理 1　设 $P_n=(V,E)$ 为含 n 个顶点的一条路，如图 3 所示. 记 $\boldsymbol{L}(P_n)$ 为 P_n 的拉普拉斯矩阵，则当 $n\to+\infty$ 时，P_n 的拉普拉斯谱半径的极限为 4. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(P_n)=4$.

证明　首先证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(P_n)$ 的存在性.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为相对于谱半径 $\mu(P_n)$ 的单位特征向量，x_i 对应于顶点 v_i（$1\leqslant i\leqslant n$）. 由于有

$$\mu(P_n)=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}(P_n)x=\sum_{(i,j)\in E(P_n)}(x_i-x_j)^2\leqslant$$

$$2\sum_{i\in V(P_n)}x_i^2-2\sum_{(i,j)\in E(P_n)}x_ix_j\leqslant 2+\sum_{(i,j)\in E(P_n)}(x_i^2+x_j^2)\leqslant 4.$$

又由引理 3 可知：$\mu(P_n)\leqslant\mu(P_{n+1})$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(P_n)$ 存在.

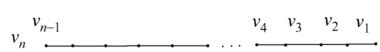

图 3　n 个顶点的 P_n 路

Fig. 3　P_n is a path with n vertices

另一方面，取 $x_i=\dfrac{(-1)^i}{\sqrt{n}}$，则有 $\|\boldsymbol{x}\|=1$，且有

$$x'\boldsymbol{L}(P_n)\boldsymbol{x}=\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2(n-1)=4-\frac{4}{n},$$

从而有 $4-\dfrac{4}{n}\leqslant\mu(P_n)\leqslant 4$，而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4-\dfrac{4}{n}\right)=4$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(P_n)=4$.

定理 2　设 $C_n=(V,E)$ 为含 n 个顶点的一条回路（图 4），且 C_n 中的每一个顶点的度为 2，记 $\boldsymbol{L}(C_n)$ 为 C_n 的拉普拉斯矩阵，则当 $n\to+\infty$ 时，C_n 的拉普拉斯谱半径的极限为 4，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(C_n)=4$.

证明　由引理 4 可知 $\mu(C_n)\geqslant\mu(P_n)$，其中 P_n 为对应含 n 个顶点的一条路，P_n 如图(3)所示.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为对应于谱半径 $\mu(C_n)$ 的单位特征向量，其中 x_i 对应于顶点 v_i（$1\leqslant i\leqslant n$）.

由于有

$$(C_n)=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}(C_n)\boldsymbol{x}=\sum_{(i,j)\in E(C_n)}(x_i-x_j)^2=$$

$$2\sum_{i\in V(C_n)}x_i^2-2\sum_{(i,j)\in E(C_n)}x_ix_j\leqslant 2+\sum_{(i,j)\in E(P_n)}(x_i^2+x_j^2)\leqslant 4.$$

又因为有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(p_n)=4$. 因此, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(C_n)=4$ 成立.

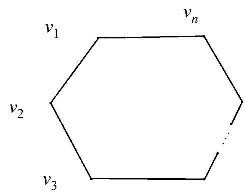

图 4 n 个顶点的 C_n 回路

Fig. 4 C_n is a loop with n vertices

定理 3 在最大度为 Δ 的 n 个顶点的树中,记邻接谱半径最小的树为 $T_{n,\Delta}^{\min}$. 当 $\Delta=2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(T_{n,\Delta}^{\min})=2$;而当 $\Delta\geqslant3$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(T_{n,\Delta}^{\min})=\dfrac{\Delta-1}{\sqrt{\Delta-2}}$.

证明 当 $\Delta=2$ 时,由引理 6 可得

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(T_{n,\Delta}^{\min})=\lim_{n\to+\infty}\rho(P_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\frac{\pi}{n+1}\right)=2.$$

因此,当 $\Delta=2$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(T_{n,\Delta}^{\min})=2$.

当 $\Delta\geqslant3$ 时,可以分为 $\Delta=3$ 和 $\Delta\geqslant4$ 两种情形进行讨论.

情形 1 当 $\Delta=3$ 时,由引理 1 可设树 $T_{n,\Delta}^{\min}$(图 5)的顶点集为 V,且 $v_i\in V(i=1,2,\cdots,n)$,又设 $w\notin V$,令 $T'=T+v_2w$, T' 如图 6 所示. 由引理 7,8 可知, $\rho(T_{n,\Delta}^{\min})<\rho(T')=2$.

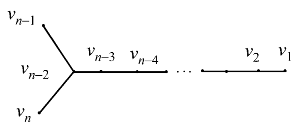

图 5 $\Delta=3$ 的 $T_{n,\Delta}^{\min}$ 树

Fig. 5 $T_{n,\Delta}^{\min}$ is a tree with the maximum degree $\Delta=3$

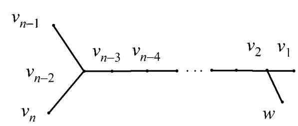

图 6 T' 树

Fig. 6 T' is a tree

同样的,由引理 10 可知, $\rho(T_{n,3}^{\min})>\rho(P_n)$;由引理 6 可知, $\rho(P_n)=2\cos\dfrac{\pi}{n+1}$. 由于有

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(P_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\frac{\pi}{n+1}\right)=2,$$

故有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(T_{n,\Delta}^{\min})=2$. 即当 $\Delta=3$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(T_{n,\Delta}^{\min})=\dfrac{\Delta-1}{\sqrt{\Delta-2}}$.

情形 2 当 $\Delta\geqslant4$ 时,由引理 1 可设树 $T_{n,\Delta}^{\min}$(图 7),其中 $v_i\in V(i=1,2,\cdots,n)$为 $T_{n,\Delta}^{\min}$ 中的顶点.

为了方便起见,下面的证明过程中,用 T 来表示 $T_{n,\Delta}^{\min}$, ρ_n 来表示 $T_{n,\Delta}^{\min}$的邻接谱半径 $\rho(T_{n,\Delta}^{\min})$.

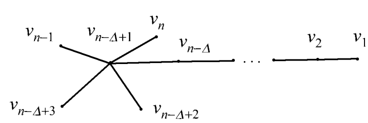

图 7 $\Delta\geqslant4$ 的 $T_{n,\Delta}^{\min}$ 树

Fig. 7 $T_{n,\Delta}^{\min}$ is a tree with the maximum degree $\Delta\geqslant4$

设 $\boldsymbol{x}$ 为 T 对应于 ρ_n 的正的特征向量,记 x_i 为 $\boldsymbol{x}$ 中对应于点 $\mathrm{v_i}$ 的分量,T 中与点 $\mathrm{v_i}$ 相邻点的集合为 $\mathrm{N_T(v_i)}$. 由于有

$$\rho_n x_i=\sum_{v_j\in N_T(v_i)}x_j,$$

由此可得

$$\rho_n x_1=x_2,\qquad \rho_n x_2=x_1+x_3,\cdots,$$

$$\rho_n x_{n-\Delta}=x_{n-\Delta-1}+x_{n-\Delta+1},\qquad \rho_n x_{n-\Delta+1}=\frac{\Delta-1}{\rho_n}x_{n-\Delta+1}+x_{n-\Delta},$$

$$\rho_n x_j=x_{n-\Delta+1},\qquad n-\Delta+2\leqslant j\leqslant n.$$

令 $\mathrm{x_0}=0$, $\mathrm{x_1}=1$,由上面给出的一些等式可得

$$x_{t+1}=\rho_n x_t-x_{t-1},\qquad 1\leqslant t\leqslant n-\Delta,$$

$$\rho_n x_{n-\Delta+1}=\frac{\Delta-1}{\rho_n}x_{n-\Delta+1}+x_{n-\Delta},$$

$$x_j=\frac{1}{\rho_n}x_{n-\Delta+1},\qquad n-\Delta+2\leqslant j\leqslant n.$$

由 $\mathrm{x_{t+1}}=\rho_n\mathrm{x_t}-\mathrm{x_{t-1}}(1\leqslant \mathrm{t}\leqslant \mathrm{n}-\Delta)$可知,它的特征方程为 $\lambda^2=\rho_n\lambda-1$,可得其解为

$$\lambda_1=\frac{\rho_n+\sqrt{\rho_n-4}}{2},$$

$$\lambda_2=\frac{\rho_n-\sqrt{\rho_n-4}}{2},$$

则其通解为

$$x_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t,\qquad 1\leqslant t\leqslant n-\Delta+1.$$

其中：c_1，c_2 为常数.

由于 $\rho_n x_{n-\Delta+1}=\frac{\Delta-1}{\rho_n}x_{n-\Delta+1}+x_{n-\Delta}$，因此 $\rho_n-\frac{\Delta-1}{\rho_n}=\frac{x_{n-\Delta}}{x_{n-\Delta+1}}$. 分别将 $x_{n-\Delta}$ 和 $x_{n-\Delta+1}$ 代入，可得

$$\rho_n-\frac{\Delta-1}{\rho_n}=\frac{c_1\lambda_1^{n-\Delta}+c_2\lambda_2^{n-\Delta}}{c_1\lambda_1^{n-\Delta+1}+c_2\lambda_2^{n-\Delta+1}}.$$

由于易知在 Δ 固定 n 递增时 ρ_n 单调递增，且 ρ_n 有界，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n$ 存在.

设 ρ_n 的极限为 r，对上式两边取极限可得

$$\gamma-\frac{\Delta-1}{\gamma}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{c_1\lambda_1^{n-\Delta}+c_2\lambda_2^{n-\Delta}}{c_1\lambda_1^{n-\Delta+1}+c_2\lambda_2^{n-\Delta+1}}\right).$$

由于 $\lambda_1=\frac{\rho_n+\sqrt{\rho_n-4}}{2}$，且 $\lambda_2=\frac{\rho_n-\sqrt{\rho_n-4}}{2}$，代入可得

$$r-\frac{\Delta-1}{r}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\lambda_1}=\lim_{n\to+\infty}\lambda_2,$$

即可得 $r-\frac{\Delta-1}{r}=\frac{r-\sqrt{r^2-4}}{2}$，解得 $r=\frac{\Delta-1}{\sqrt{\Delta-2}}$. 因此当 $\Delta\geqslant4$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n=\frac{\Delta-1}{\sqrt{\Delta-2}}$.

综上所述，当 $\Delta\geqslant3$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n=\frac{\Delta-1}{\sqrt{\Delta-2}}$. 定理 3 得证.

定理 4　设 $T_{n,\Delta}^{max}$ 是在最大度为 Δ 的 n 个顶点的树中邻接谱半径最大的树，记 $\rho(T_{n,\Delta}^{max})$ 为 $T_{n,\Delta}^{max}$ 的邻接谱半径，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(T_{n,\Delta}^{max})=2\sqrt{\Delta-1}$.

证明　容易知道 $\rho(T_{n,\Delta}^{max})$ 有界，且当 Δ 固定 n 递增时 $\rho(T_{n,\Delta}^{max})$ 单调上升，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(T_{n,\Delta}^{max})$ 存在. 取 $\{\rho(T_{n,\Delta}^{max})\}$ 中的子序列 $\{\rho(T_{t_k,\Delta}^{max})\}$，其 $t_k=\frac{\Delta((\Delta-1)^{k-1}-1)}{\Delta-2}+1$，$k=2m+1$.

由引理 2 可知，$T_{t_k,\Delta}^{max}$ 为最大度为 Δ 的 t_k 个顶点的几乎完全满 Δ 度树，又因 $t_k=\frac{\Delta((\Delta-1)^{k-1}-1)}{\Delta-2}+1$，故 $T_{t_k,\Delta}^{max}$ 为最大度为 Δ 的 t_k 个顶点的 k 层完全满 Δ 度树(其中层数 k 等于树的高度加 1).

记树 $T_{t_k,\Delta}^{max}$ 的邻接谱半径为 $\rho(T_{t_k,\Delta}^{max})$，由引理 9 可知 $\boldsymbol{R}_k$ 的最大特征值为 $T_{t_k,\Delta}^{\max}$ 的邻接谱半径 $\rho(T_{t_k,\Delta}^{\max})$，其中 $\boldsymbol{R}_k$ 为引理 9 中定义的对称三对角阵，记 $\boldsymbol{R}_k$ 的最大特征值为 $\rho(\boldsymbol{R}_k)$.

下面计算当 Δ 固定 $n\to+\infty$，即 Δ 固定 $k\to+\infty$ 时，$\rho(T_{t_k,\Delta}^{\max})$ 的极限.

由于 $\boldsymbol{R}_k$ 的最大特征值为 $T_{t_k,\Delta}^{\max}$ 的邻接谱半径 $\rho(T_{t_k,\Delta}^{\max})$，有 $\rho(T_{t_k,\Delta}^{\max})=\rho(\boldsymbol{R}_k)$，且有

$$\boldsymbol{R}_k=\begin{bmatrix}0&s&0&\cdots&&0\\ s&0&s&&&\vdots\\ 0&s&&&&\\ \vdots&&&&s&0\\ &&&s&0&t\\ 0&\cdots&&0&t&0\end{bmatrix}_{k\times k}.$$

其中：$s=\sqrt{\Delta-1}$；$t=\sqrt{\Delta}$. 因此，令 $\boldsymbol{B}_k=\begin{bmatrix}0&s&0&\cdots&&0\\ s&0&s&&&\vdots\\ 0&s&&&&\\ \vdots&&&&s&0\\ &&&s&0&s\\ 0&\cdots&&0&s&0\end{bmatrix}_{k\times k}$，记 $\boldsymbol{B}_k$ 的最大特征值为 $\rho(\boldsymbol{B}_k)$，则有 $\rho(\boldsymbol{R}_k)\geqslant\rho(\boldsymbol{B}_k)$，即 $\rho(T_{t_k,\Delta}^{\max})=\rho(\boldsymbol{R}_k)\geqslant\rho(\boldsymbol{B}_k)$.

由于 $\boldsymbol{B}_k=s\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&&0\\1&0&1&&&\vdots\\0&1&&&&\\\vdots&&&&1&0\\&&&1&0&1\\0&\cdots&&0&1&0\end{bmatrix}_{k\times k}$，令 $\boldsymbol{C}_k=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&&0\\1&0&1&&&\vdots\\0&1&&&&\\\vdots&&&&1&0\\&&&1&0&1\\0&\cdots&&0&1&0\end{bmatrix}_{k\times k}$，记 $\boldsymbol{C}_k$ 的最大特征值为 $\rho(\boldsymbol{C}_k)$，可得 $\rho(\boldsymbol{B}_k)=s\rho(\boldsymbol{C}_k)$，其中 $s=\sqrt{\Delta-1}$. 由文献[9]可知：$\rho(T^{\max}_{t_k,\Delta})<2\sqrt{\Delta-1}$，则 $2\sqrt{\Delta-1}>\rho(T^{\max}_{t_k,\Delta})=\rho(\boldsymbol{R}_k)\geqslant\rho(\boldsymbol{B}_k)=s\rho(\boldsymbol{C}_k)$.

令 $\boldsymbol{D}_k$ 为 k 阶的对角矩阵，且有 $\boldsymbol{D}_k=\mathrm{diag}(r_1,\cdots,r_m,r_{m+1},r_m,\cdots,r_1)$. 其中：$r_q=q-\frac{q(q-1)}{2}\varepsilon(q=1,2,\cdots,m+1)$，$\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{(k+1)\Delta-2k}{(k-1)(\frac{2+k}{2}\Delta-k)}>0$，因此有

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{(k+1)\Delta-2k}{(k-1)(\frac{2+k}{2}\Delta-k)}=\frac{2}{(k-1)}\frac{(k+1)\Delta-2k}{4(\frac{2+k}{2}\Delta-k)}=\frac{2}{(k-1)}\frac{k(\Delta-2)+\Delta}{2k(\Delta-2)+4\Delta}<\frac{2}{k-1}.$$

即 $0<\varepsilon<\frac{2}{k-1}$.

由于 $k=2m+1$，故可得 $0<\varepsilon<\frac{2}{k-1}\leqslant\frac{2}{q-1}(q=1,2,\cdots,m+1)$. 又由 $r_q=q-\frac{q(q-1)}{2}\varepsilon(q=1,2,\cdots,m+1)$，可得 $r_q>1(q=2,3,\cdots,m+1)$，且 $r_1=1$.

令 k 阶矩阵 $\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{D}_k^{-1}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{D}_k$，则有矩阵 $\boldsymbol{F}_k$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}_k$ 相似，即矩阵 $\boldsymbol{F}_k$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}_k$ 有相同的特征值. 记 $\boldsymbol{F}_k=(f_{i,j})(i,j=1,2,\cdots,2m+1)$，则其中 $\boldsymbol{F}_k$ 的行和可表示为 $f_i=\sum_{j=1}^{2m+1}f_{i,j}$. 记 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_{2m+1})'$，由于 $\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{D}_k^{-1}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{D}_k$，因此可得

$$\boldsymbol{f}=(\frac{r_2}{r_1},\frac{r_1+r_3}{r_2},\cdots,\frac{r_{m-1}+r_{m+1}}{r_m},\frac{2r_m}{r_{m+1}},\frac{r_{m-1}+r_{m+1}}{r_m},\cdots,\frac{r_1+r_3}{r_2},\frac{r_2}{r_1})'.$$

由于 $r_q=q-\frac{q(q-1)}{2}\varepsilon(q=1,2,\cdots,m+1)$，分别将 $r_q(q=1,2,\cdots,m+1)$ 代入上式，可得

$$\boldsymbol{f}=(2-\varepsilon,2-\frac{\varepsilon}{r_m},\cdots,2-\frac{\varepsilon}{r_m},\frac{2r_m}{r_{m+1}},2-\frac{\varepsilon}{r_m},\cdots,2-\frac{\varepsilon}{r_2},2-\varepsilon)'.$$

记 $\boldsymbol{F}_k$ 的最大特征值为 $\rho(\boldsymbol{F}_k)$，由引理 5 可知，$\rho(\boldsymbol{F}_k)$ 大于等于 $\boldsymbol{F}_k$ 的最小行和，因此讨论 $\boldsymbol{F}_k$ 的最小行和的极限.

由于 $r_q>1(q=2,3,\cdots,m+1)$，且 $r_1=1$，因此有 $2-\frac{\varepsilon}{r_p}\geqslant2-\varepsilon(p=1,2,\cdots,m)$，即 $\boldsymbol{F}_k$ 的行和 $f_i\geqslant2-\varepsilon(1,2,\cdots,m,m+2,\cdots,2m,2m+1)$. 而由 $\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{(k+1)\Delta-2k}{(k-1)(\frac{2+k}{2}\Delta-k)}$ 可得

$$\lim_{k\to+\infty}\varepsilon=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{(k+1)\Delta-2k}{(k-1)(\frac{2+k}{2}\Delta-k)}\right)=0.$$

由 $k=2m+1$，可知 $k\to+\infty$ 时，$m\to+\infty$. 因此有

$$\lim_{k\to+\infty}f_i=\lim_{m\to+\infty}f_i\geqslant\lim_{m\to+\infty}(2-\varepsilon)=2,\qquad i=1,2,\cdots,m,m+2,\cdots,2m,2m+1.$$

由于有 $\lim_{k\to+\infty}f_{m+1}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2r_m}{r_{m+1}}=\lim_{m\to+\infty}\frac{2r_m}{r_{m+1}}$，因此有 $r_q=q-\frac{q(q-1)}{2}\varepsilon(q=1,2,\cdots,m+1)$，故可得

$$\frac{2r_m}{r_{m+1}}=2\frac{m}{m+1}\left(\frac{1-\frac{m-1}{2}\varepsilon}{1-\frac{m-1}{2}\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}}\right).$$

而且，由于有 $\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{(k+1)\Delta-2k}{(k-1)(\frac{2+k}{2}\Delta-k)}$，所以可以得到

$$1-\frac{m-1}{2}\varepsilon=1-\frac{m-1}{2}\frac{(2m+2)\Delta-(2m+1)}{4m(\frac{2+2m+1}{2}\Delta-(2m+1))}=1-\frac{(\Delta-2)m^2+m+1-\Delta}{(4\Delta-2)m^2+(\Delta+1)m}.$$

又由于 $\lim\limits_{m\to+\infty}(1-\frac{m-1}{2}\varepsilon)=1$，因此有

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{2r_m}{r_{m+1}}=\lim_{m\to+\infty}\frac{2r_m}{r_{m+1}}=\lim_{m\to+\infty}\left(2\frac{m}{m+1}\frac{1-\frac{m-1}{2}\varepsilon}{1-\frac{m-1}{2}\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}}\right)=2.$$

即 $\lim\limits_{k\to+\infty}f_{m+1}=\lim\limits_{m\to+\infty}f_{m+1}=2$.

综上所述，可得 $\lim\limits_{k\to+\infty}f_i=\lim\limits_{m\to+\infty}f_i\geqslant2(i=1,2,\cdots,2m+1)$. 由于 $\boldsymbol{F}_k$ 与 $\boldsymbol{C}_k$ 有相同的特征值，从而有 $\lim\limits_{k\to+\infty}\rho(\boldsymbol{C}_k)=\lim\limits_{k\to+\infty}\rho(\boldsymbol{F}_k)\geqslant2$. 又由引理 5 可知 $\lim\limits_{k\to+\infty}\rho(\boldsymbol{C}_k)\leqslant2$，故 $\lim\limits_{k\to+\infty}\rho(\boldsymbol{C}_k)=2$.

由于有 $\rho(\boldsymbol{B}_k)=s\rho(\boldsymbol{C}_k)$，$s=\sqrt{\Delta-1}$，且 $\rho(T^{\max}_{t_k,\Delta})=\rho(\boldsymbol{R}_k)\geqslant\rho(\boldsymbol{B}_k)$，因此有 $\lim\limits_{k\to+\infty}\rho(\boldsymbol{R}_k)\geqslant\lim\limits_{k\to+\infty}\rho(\boldsymbol{B}_k)=2s=2\sqrt{\Delta-1}$. 又由于 $\rho(\boldsymbol{R}_k)=\rho(T^{\max}_{t_k,\Delta})<2\sqrt{\Delta-1}$，从而有 $\lim\limits_{k\to+\infty}\rho(T^{\max}_{t_k,\Delta})=2\sqrt{\Delta-1}$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(T^{\max}_{n,\Delta})=2\sqrt{\Delta-1}$.

参考文献：

[1] 于罡，宋海洲. 正则图的均匀边染色[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2010，31(6)：711-714.

[2] 徐芹，林祺，束金龙. 关于最大度确定的树的谱半径[J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2007(3)：75-79.

[3] 邵嘉裕，沈利红，郭继明. 树的最小 Laplace 谱半径的排序[J]. 同济大学学报：自然科学版，2007，35(4)：552-555.

[4] 柳柏濂. 组合矩阵论[M]. 北京：科学出版社，2005：18-33.

[5] CVETKOVIC D M，DOOB M，SACHS H. Spectra of graphs[M]. New York：Academic Press，1980.

[6] 方坤夫. 图的移接变换与谱半径大小的关系[J]. 湖州师范学院学报，2007，29(2)：10-13.

[7] ROJO O，SOTO R. The spectra of the adjacency matrix and Laplacian matrix for some balanced trees[J]. Linear Algebra Appl，2005，403(1)：97-117.

[8] 李乔，冯克勤. 论图的最大特征值[J]. 应用数学学报，1979(2)：167-175.

[9] BONDY J A，MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London：The Macmillan Press LTD，1976.

Limitation of the Spectral Radius of Several Kinds of Limited Graphs

TIAN Lu-lu，SONG Hai-zhou，WANG Qiu-fen

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract：In this paper，we discuss the problem of the limitation of the spectral radius sequence of several kinds of limited graphs，and give the limitations of the Laplacian spectral radius of the path and the loop on n vertices when the number of n increasing，as well as the limitations of the adjacency spectral radii for the trees whose adjacency spectral radii are the smallest and the biggest in the trees on n vertices and maximum degree when Δ is fixed and the number of n increasing.

Keywords：graph；almost completely full degree tree；completely full degree tree；spectral radius；limitation

（**责任编辑**：黄晓楠　　**英文审校**：黄心中）