解两类特殊三对角线性方程组的修正追赶法

曾 文 平

（数 学 系）

摘 要

本文给出解两类特殊的三对角线性方程组的一种新方法，这类线性方程组常在数值解微分方程时出现。本算法的基础是求矩阵逆的著名的秩一修正法，数值例子表明该算法是有效的。

一、引 言

近年来，由于解决实际问题的需要，研究解特殊的三对角线性方程组的方法颇为人们所兴趣。虽然一般的三对角线性方程组可用普通追赶法[1]求解，但它不能充分地利用某些特殊的三对角线性方程组的特殊性质。文[2-5]考虑了求解下列特殊三对角线性方程组

$$AX=f \tag{1.1}$$

其中

$$X=(x_1,\ x_2\cdots\cdots,\ x_n)^T \tag{1.2}$$

$$f=(f_1,\ f_2\cdots\cdots,\ f_n)^T \tag{1.3}$$

$$A=\begin{pmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & a & b \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.4a}$$

或

$$A=\begin{pmatrix} b & c & & & a \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ c & & & a & b \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.4b}$$

的各种快速近似追赶法。

本文考虑另外两类特殊的三对角线性方程组的解法。这两类形为（1.1）的三对角线性方程组的系数矩阵A具有如下的特殊形式：

$$A_a=\begin{pmatrix} b & c+a & & \\ a & b & c & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c \\ & & a & b \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.5a}$$

或

$$A_b=\begin{pmatrix} b+b_1 & c & & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & b & c \\ & & & a & b+b_2 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.5b}$$

其中 $b_1>0$，$b_2>0$，它们在数值解微分方程时经常遇到。基于求矩阵的逆的著名的秩一修正法[6,7]。本文提出解这两类线性方程组的修正追赶法，它能充分利用系数矩阵各对角元均相等（或至多头尾两对角元不相等）这一特殊性质。数值例子表明这个算法是有效的，而计算机时比普通追赶法还少。

不失一般性，设 $b>0$，用系数矩阵的元为系数的二次方程

$$z^2-bz+ac=0 \tag{1.6}$$

的最大正根（设 $b^2-4ac>0$）

$$\alpha=\frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-4ac})>0 \tag{1.7}$$

除（1.1）两端得等价的方程组

$$M_aX=d \tag{1.8a}$$

及

$$M_bX=d \tag{1.8b}$$

其中

$$M_a=\begin{pmatrix} 1+\beta\gamma & \gamma+\beta & & & \\ \beta & 1+\beta\gamma & \gamma & & \\ & \beta & 1+\beta\gamma & \gamma & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & & \beta & 1+\beta\gamma \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.9a}$$

及

$$M_b=\begin{pmatrix} 1+\beta\gamma+\delta_1 & \gamma & & & \\ \beta & 1+\beta\gamma & \gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta & 1+\beta\gamma & \gamma \\ & & & \beta & 1+\beta\gamma+\delta_2 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.9b}$$

$$d=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n)^T \tag{1.10}$$

而

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{a}{\alpha}, & \delta_1 = \dfrac{b_1}{\alpha} > 0 \\ \gamma = \dfrac{c}{\alpha}, & \delta_2 = \dfrac{b_2}{\alpha} > 0 \\ d_k = \dfrac{f_k}{\alpha}, & (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases} \tag{1.11}$$

系数矩阵 M_a 及 M_b 可进行如下分解:

$$M_a = L_a \tilde{U}_a \tag{1.12a}$$

及

$$M_b = L_b \tilde{U}_b \tag{1.12b}$$

其中

$$L_a = L_b \overset{\text{记}}{=} L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \beta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.13}$$

$$\tilde{U}_a = \begin{pmatrix} 1+\beta\gamma & \gamma+\beta & 0 & & \\ \beta\gamma(-\beta) & 1-\beta^2 & \gamma & & \\ \beta\gamma(-\beta)^2 & \beta^3 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \gamma \\ \beta\gamma(-\beta)^{n-2} & -(-\beta)^{n-1} & & & \\ \beta\gamma(-\beta)^{n-1} & -(-\beta)^{n} & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.14a}$$

$$\tilde{U}_b = \begin{pmatrix} 1+\beta\gamma+\delta_1 & \gamma & & & \\ -\beta^2\gamma-\delta_1\beta & 1 & \gamma & & \\ \beta^3\gamma+\beta^2\delta_1 & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{n-1}\beta^{n-1}(\beta\gamma+\delta_1) & & & 1 & \gamma \\ & & & & 1+\delta_2 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.14b}$$

从而求解(1.8a)和(1.8b)就等价于求解

$$\begin{cases} Ly = d & (1.15) \\ \tilde{U}_a x = y & (1.16) \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} Ly = d & (1.17) \\ \tilde{U}_b x = y & (1.18) \end{cases}$$

其中 $y = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)^T$ 为未知向量。

二、解(1.8a)的修正追赶法

解(1.8a)等价于解(1.15)、(1.16)。由(1.15)易解得

$$\begin{cases} y_1 = d_1 \\ y_k = d_k - \beta y_{k-1} \quad (k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n) \end{cases} \tag{2.1}$$

即

$$y_k=\sum_{l=1}^{k}d_l(-\beta)^{k-l}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{2.2}$$

但不能用一般回代法得出（1.16）的解。为解（1.16），需要如下的引理（即秩一算法）。

引理　设 $T\in R^{n\times n}$ 非奇，若对任意向量 u，$v\in R^n$ 以及数 σ，满足 $v^TT^{-1}u\neq-\sigma^{-1}$，则 $S=T+\sigma uv^T$ 非奇，且

$$S^{-1}=T^{-1}-\frac{T^{-1}uv^TT^{-1}}{v^TT^{-1}u+\sigma^{-1}}\tag{2.3}$$

证。因 $v^TT^{-1}u\neq-\sigma^{-1}$，故(2.3)有意义，且易证 $S^{-1}S=SS^{-1}=I$，故 S 有逆且(2.3)式的 S^{-1} 为 S 的逆。

它也可在〔6〕或〔7〕中找到，这是我们算法的主要依据。由此，易得如下基本定理

定理1　若系数矩阵 A_a 严格对角占优，且 $b>0$，$a\cdot c>0$，则 $\tilde{U}_a$ 非奇，且

$$\tilde{U}_a{}^{-1}=U_a{}^{-1}-\frac{U_a{}^{-1}\tilde{g}\tilde{e}^TU_a{}^{-1}}{\tilde{e}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}+1}\tag{2.4}$$

式中

$$U_a=\begin{pmatrix}1 & \gamma & & & \\ & 1 & \gamma & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \gamma \\ & & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}\tag{2.5}$$

$$\tilde{g}=(\beta,\ -\beta^2,\ \beta^3,\ \cdots,\ -(-\beta)^{n-1},\ -(-\beta)^n)^T\tag{2.6}$$

$$\tilde{e}=(\gamma,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T\tag{2.7}$$

证　因矩阵 A_a 严格对角占优，即

$$|b|>|a|+|c|$$

从而可得 $b^2-4ac>0$，于是方程（1.6）有两个不等实根。又因 $b>0$，若 $b\geqslant2|a|$，则由（1.7）显然有 $\alpha>|a|$。若 $b<2|a|$，则由 $|b|>|a|+|c|$ 推得 $4|a|b>4|a|^2+4ac$，从而 $b^2-4ac>(2|a|-b)^2$，于是得 $\alpha=\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}>|a|$。同理可证 $\alpha>|c|$。

由（1.11）得：$|\beta|<1$，$|\gamma|<1$。

显然，若记 $e_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$ 及 $e_2=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$ 则有

$$\begin{aligned}\tilde{U}_a&=U_a+\gamma\tilde{g}e_1{}^T+\tilde{g}e_2{}^T\\&=U_a+\tilde{g}(\gamma e_1{}^T+e_2{}^T)\\&=U_a+\tilde{g}\cdot\tilde{e}^T\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中 $\tilde{g}$ 及 $\tilde{e}$ 如（2.6）及（2.7）所指出。

显然，$U_a{}^{-1}$ 存在，而

$$\tilde{e}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}=\gamma e_1{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}+e_2{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}\tag{2.9}$$

其中 $e_1{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}$ 及 $e_2{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}$ 分别是方程

$$U_a\omega=\tilde{g}\tag{2.10}$$

的解 $\omega=(\omega_1,\ \omega_2\cdots,\ \omega_n)^T$ 的第一个分量 ω_1 及第二个分量 ω_2，即

$$\omega_1=e_1{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g},\qquad\omega_2=e_2{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}\tag{2.11}$$

而解（2.10）得

$$\omega_k=-(-\beta)^k\sum_{l=0}^{n-k}(\beta\gamma)^l\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{2.12}$$

所以，

$$\omega_1=e_1{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}=\beta\sum_{l=0}^{n-1}(\beta\gamma)^l=\beta\frac{1-(\beta\gamma)^n}{1-\beta\gamma}\tag{2.13}$$

$$\omega_2=e_2{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}=-\beta^2\sum_{l=0}^{n-2}(\beta\gamma)^l=-\beta^2\frac{1-(\beta\gamma)^{n-1}}{1-\beta\gamma}\tag{2.14}$$

则

$$\begin{aligned}\omega&\overset{\text{记}}{=}\gamma e_1{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}+e_2{}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}\\&=\beta\gamma\frac{1-(\beta\gamma)^n}{1-\beta\gamma}-\beta^2\frac{1-(\beta\gamma)^{n-1}}{1-\beta\gamma}\\&=\frac{(\beta\gamma-\beta^{n+1}\gamma^{n+1})-\beta^2[1-(\beta\gamma)^{n-1}]}{1-\beta\gamma}\end{aligned}\tag{2.15}$$

因 $|\beta|<1$，$|\gamma|<1$，故当 $\beta\gamma>0$ 时

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{(\beta\gamma-\beta^2)+(\beta\gamma)^{n-1}[\beta^2-(\beta\gamma)^2]}{1-\beta\gamma}\\&>\frac{\beta\gamma-\beta^2}{1-\beta\gamma}=\frac{(1-\beta^2)-(1-\beta\gamma)}{1-\beta\gamma}\\&>\frac{-(1-\beta\gamma)}{1-\beta\gamma}=-1\end{aligned}\tag{2.16}$$

由引理，立即得本定理的结论。

定理 2　若矩阵 A_a 严格对角占优，且 $b>0$，$ac>0$，则（1.16）的解是

$$x=\tilde{x}-\frac{1}{\tilde{e}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}+1}(\gamma\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)\omega\tag{2.17}$$

其中 $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \cdots,\ \tilde{x}_n)^T$ 是

$$U_a\tilde{x}=y\tag{2.18}$$

的解，ω 是 $U_a\omega=\tilde{g}$ 的解。

证：由定理 1，（1.16）的解是

$$\begin{aligned}x&=\tilde{U}_a{}^{-1}y=U_a{}^{-1}y-\frac{U_a{}^{-1}\tilde{g}\tilde{e}^TU_a{}^{-1}}{\tilde{e}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}+1}y\\&=U_a{}^{-1}y-\frac{\tilde{e}^TU_a{}^{-1}y}{\tilde{e}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}+1}U_a{}^{-1}\tilde{g}\end{aligned}$$

而

$$\tilde{e}^TU_a{}^{-1}y=(\gamma e_1{}^T+e_2{}^T)U_a{}^{-1}y=\gamma\tilde{x}_1+\tilde{x}_2$$

$$U_a{}^{-1}\tilde{g}=\omega$$

並由（2.18）立即得本定理的结论：

$$x=\tilde{x}-\frac{1}{\tilde{e}^TU_a{}^{-1}\tilde{g}+1}(\gamma\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)\omega$$

根据定理 2，可以构成解（1.8a）［或等价地具系数矩阵（1.5a）的三对角方程组（1.1）］的如下算法：

算法1．

① 按（1.7）及（1.11）计算 a, β, γ, d_k　（$k=1, 2, \cdots, n$）

② 解（1.15）得 $y_1=d_1$, $y_k=d_k-\beta y_{k-1}$　（$k=2, 3, \cdots, n$）

③ 解（2.18）得 $\tilde{x}_n=y_n$, $\tilde{x}_k=y_k-\gamma\tilde{x}_{k+1}$　（$k=n-1, n-2, \cdots, 2, 1$）

④ 解（2.10）得 $\omega_n=-(-\beta)^n$, $\omega_k=-(-\beta)^k-\gamma\omega_{k+1}$　（$k=n-1, \cdots, 2, 1$）

⑤ 计算　$\tau=(\tilde{e}^T U_a^{-1}\tilde{g}+1)^{-1}=(\gamma\omega_1+\omega_2+1)^{-1}$

⑥ 按（2.17）计算（1.8a）的解 $x=\tilde{x}-\tau(\gamma\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)\omega$

为了改进算法1的计算量，我们进行进一步分析。

由（2.17）和（2.12）得

$$x_k=\tilde{x}_k-\frac{1-\beta\gamma}{1-\beta^2-\beta^{n+1}\gamma^{n+1}+\beta^2(\beta\gamma)^{n-1}}(\gamma\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)\omega_k$$

$$=\tilde{x}_k+\frac{1-(\beta\gamma)^{n-k+1}}{1-\beta^2-\beta^{n+1}\gamma^{n+1}+\beta^2(\beta\gamma)^{n-1}}(\gamma\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)(-\beta)^k$$

故

$$|x_k-\tilde{x}_k|<\frac{|\beta|^k(1+|\beta\gamma|)}{\left|1-\beta^2-|\beta\gamma|\right|}\left\{|\gamma||\tilde{x}_1|+|\tilde{x}_2|\right\} \tag{2.19}$$

由（2.18）和（1.15）知，$\tilde{x}$ 为方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma & & & \\ \beta & 1+\beta\gamma & \gamma & & \\ & \beta & 1+\beta\gamma & \gamma & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & & \beta & 1+\beta\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \vdots\\ \tilde{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix} \tag{2.20}$$

的解。（2.17）表明：（1.1）的解可由（2.20）的解加上一个适当的修正项而得到，其误差可由（2.19）估计。

从而得到算法1的一个修正算法

算法2（设计算的允许误差限为 ε）

① 按（1.7）及（1.11）计算 a, β, γ, d_k（$k=1, 2, \cdots, n$）

② 解（1.15）得 y_k（$k=n, n-1, \cdots, 1$）

③ 解（2.18）得 $\tilde{x}_k$（$k=n, n-1, \cdots, 1$）

④ 对满足 $K\geqslant\dfrac{\left|ln\dfrac{\varepsilon\left|1-\beta^2-|\beta\gamma|\right|}{(|\gamma||\tilde{x}_1|+|\tilde{x}_2|)(1+|\beta\gamma|)}\right|}{\left|ln|\beta|\right|}$ 的 k，按（2.17）计算 X_k，而对其余的 k，取 $x_k=\tilde{x}_k$。

三、解(1.8b)的修正追赶法

如前，解（1.8b）等价于解（1.17）及（1.18）。由（1.17）得

$$\begin{cases} y_1=d_1 \\ y_k=d_k-\beta y_{k-1} \quad (k=2, 3, \cdots, n) \end{cases} \tag{2.1}$$

为解（1.18）需要如下定理。

定理3　若系数矩阵 A_b 严格对角占优，且 $b>0$，$ac>0$，$b_1>0$，$b_2>0$，则 $\tilde{U}_b$ 非奇，且

$$\tilde{U}_b^{-1}=U_b^{-1}-\frac{U_b^{-1}ge_1^TU_b^{-1}}{e_1^TU_b^{-1}g+(\beta\gamma+\delta_1)^{-1}} \tag{3.1}$$

其中

$$U_b=\begin{pmatrix}1 & \gamma & & & \\ & 1 & \gamma & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \gamma \\ & & & & 1+\delta_2\end{pmatrix}_{n\times n} \tag{3.2}$$

$$g=(1,\ -\beta,\ (-\beta)^2,\ \cdots,\ (-\beta)^{n-1})^T \tag{3.3}$$

证　如前，由矩阵 A_b 严格对角占优可得：

$$b^2-4ac>0,\ |\beta|<1,\ |\gamma|<1$$

显然，

$$\tilde{U}_b=U_b+(\beta\gamma+\delta_1)ge_1^T \tag{3.4}$$

且 U_b^{-1} 存在，因 $e_1^TU_b^{-1}g$ 是

$$U_b\omega=g \tag{3.5}$$

的解 $\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)^T$ 的第一个分量是 ω_1，即

$$\omega_1=e_1^TU_b^{-1}g \tag{3.6}$$

解（3.5）得

$$\omega_k=(-\beta)^{k-1}\sum_{l=0}^{n-k-1}(\beta\gamma)^l+(-\beta)^{k-1}\frac{(\beta\gamma)^{n-k}}{1+\delta_2}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.7}$$

所以，

$$\omega_1=e_1^TU_b^{-1}g=\frac{1-(\beta\gamma)^{n-1}}{1-\beta\gamma}+\frac{(\beta\gamma)^{n-1}}{1+\delta_2} \tag{3.8}$$

因 $|\beta\gamma|<1$，故当 $\beta\gamma>0$ 时，$e_1^TU^{-1}g>1$，而 $-(\beta\gamma+\delta_1)^{-1}<0$，所以

$$e_1^TU_b^{-1}g\neq-(\beta\gamma+\delta_1)^{-1}.$$

由引理直接得本定理的结论，证毕。

定理4　若系数矩阵 A_b 严格对角占优，且 $b>0$，$ac>0$，$b_1>0$，$b_2>0$，则（1.18）的解是

$$x=\tilde{x}-\frac{1}{e_1^TU_b^{-1}g+(\beta\gamma+\delta_1)^{-1}}\tilde{x}_1\omega \tag{3.9}$$

其中 $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \cdots,\ \tilde{x}_n)^T$ 是

$$U_b\tilde{x}=y \tag{3.10}$$

的解。

其证明与定理2类似，从略。

由此构成解（1.8b）的如下算法：

算法3．

① 按（1.7）及（1.11）计算 α，β，γ，δ_1，δ_2，d_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．

② 解（1.17）得 $y_1=d$，$y_k=d_k-\beta y_{k-1}$　$(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

③ 解 $U_b\tilde{x}=y$ 得 $\tilde{x}_n=\frac{1}{1+\delta_2}y_n$，　$\tilde{x}_k=y_k-\gamma\tilde{x}_{k+1}$　$(k=n-1,\ \cdots,\ 2,\ 1)$．

④ 解 $U_b\omega=g$ 得 $\omega_n=\dfrac{(-\beta)^{n-1}}{1+\delta_2}$，　$\omega_k=(-\beta)^{n-1}-\gamma\omega_{k+1}$（$k=n-1$，…，2，1）

⑤ 计算 $\tau=[\omega_1+(\beta\gamma+\delta_1)^{-1}]^{-1}$

⑥ 按公式（3.9）$x=\tilde{x}-\tau\tilde{x}_1\omega$ 计算（1.8b）的解

由（3.7）、（3.9）可得：

$$|x_k-\tilde{x}_k|=\left|\frac{\dfrac{1-(\beta\gamma)^{n-k}}{1-\beta\gamma}+\dfrac{(\beta\gamma)^{n-k}}{1+\delta_2}}{\dfrac{1-(\beta\gamma)^{n-1}}{1-\beta\gamma}+\dfrac{(\beta\gamma)^{n-1}}{1+\delta_2}+\dfrac{1}{\beta\gamma+\delta_1}}\right|\cdot|\beta|^{k-1}\cdot||\tilde{x}_1|$$

$$=\left|\frac{1+\delta_2-\delta_2(\beta\gamma)^{n-k}-(\beta\gamma)^{n-k+1}}{(1-\beta\gamma)(1+\delta_2)+[1+\delta_2-\delta_2(\beta\gamma)^{n-1}-(\beta\gamma)^n](\beta\gamma+\delta_1)}\right|\cdot$$

$$\cdot(|\beta\gamma|+\delta_1)\cdot|\beta|^{k-1}\cdot||\tilde{x}_1|$$

$$<\left|\frac{1+2\delta_2+|\beta\gamma|}{(1-|\beta\gamma|)(1+\delta_2)}\right|(|\beta\gamma|+\delta_1)\cdot|\beta|^{k-1}\cdot|\tilde{x}_1| \tag{3.11}$$

由此可得解（1.8b）〔等价地解具系数矩阵（1.5b）的三对角线性方程组（1.1）〕的算法3的修正法.

算法4.

① 按（1.7）及（1.11）计算 α，β，γ，δ_1，δ_2，d_k（$k=1$，2，…，n）

② 解（1.17）得 y_k（$k=1$，2，…，n）

③ 解 $U_b\tilde{x}=y$ 得 $\tilde{x}_k$（$k=n$，$n-1$，…，2，1）

④ 对满足

$$K\geqslant\frac{ln\left|\varepsilon\cdot\dfrac{(1-|\beta\gamma|)(1+\delta_2)}{[1+2\delta_2+|\beta\gamma|]\cdot(\delta_1+|\beta\gamma|)|\tilde{x}_1|}\right|}{\left|\,ln|\beta|\,\right|}+1$$

的 k 按 $x=\tilde{x}-\tau\tilde{x}_1\omega$ 计算（1.8b）的解，其余的 k 取 $x_k=\tilde{x}_k$.

四、数值例子

例1. 对常微方程边值问题

$$\begin{cases} x''-x=-(1+\pi^2)\mathrm{Sin}\,\pi t \quad (0<t<1) & (4.1)\\ x'(0)=\pi & \\ x(1)=0 & (4.2)\end{cases}$$

取步长 $h=\dfrac{1}{100}$ 等分区间[0，1]并按下述方法离散化

$$\begin{cases}\dfrac{x_{i+1}-(2+h^2)x_i+x_{i-1}}{h^2}=-(1+\pi^2)\,\mathrm{Sin}\,\dfrac{i\pi}{100}\quad(i=0,1,\cdots,99) & (4.3)\\ \dfrac{x_1-x_{-1}}{2h}=\pi & \\ x_{100}=0 & (4.4)\end{cases}$$

于是得差分方程组

$$\begin{pmatrix} 2+h^2 & -2 & & & \\ -1 & 2+h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2+h^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{99} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\pi h \\ h^2(1+\pi^2)\mathrm{Sin}\frac{\pi}{100} \\ \vdots \\ h^2(1+\pi^2)\mathrm{Sin}\frac{99\pi}{100} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

其系数矩阵为 Aa 型，其中 $a=-1$，$c=-1$，$b=2+h^2$，$f_0=-2\pi h$，$f_i=h^2(1+\pi^2)\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{100}$（$i=1, 2, \cdots, 99$）。边值问题（4.1）、（4.2）的真解为 $x=\mathrm{Sin}\,\pi t$。现将按算法2解差分方程组（4.5）所得近似解与边值问题（4.1）、（4.2）的真解在相应的网格点上的值列表比较如表1所示。

例2．对常微分方程边值问题

$$x''-x=-(1+\frac{\pi^2}{4})\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi t}{2} \quad (0<t<1) \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ x(1)=1 \end{cases} \quad (4.7)$$

在［0，1］上采用如下网格 $t_i=(i-\frac{1}{2})h$，$h=\frac{1}{100}$ 进行离散化：

$$\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{h^2}-x_i=-(1+\frac{\pi^2}{4})\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi t_i}{2} \quad (i=1, 2, \cdots, 100) \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} \frac{x_0+x_1}{2}=0 \\ \frac{x_{100}+x_{101}}{2}=1 \end{cases} \quad (4.9)$$

即

$$\begin{pmatrix} 3+h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2+h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+h^2 & -1 \\ & & & -1 & 3+h^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{99} \\ x_{100} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h^2(1+\frac{\pi^2}{4})\,\mathrm{Sin}\frac{\pi h}{4} \\ h^2(1+\frac{\pi^2}{4})\,\mathrm{Sin}\frac{3\pi h}{4} \\ \vdots \\ h^2(1+\frac{\pi^2}{4})\,\mathrm{Sin}\frac{197\pi h}{4} \\ h^2(1+\frac{\pi^2}{4})\,\mathrm{Sin}\frac{199\pi h}{4}+2 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

其系数矩阵为 A_b 型，其中

$$a=-1,\ c=-1,\ b=2+h^2,\ b_1=1,\ b_2=1,$$

$$f_i=h^2(1+\frac{\pi^2}{4})\,\mathrm{Sin}\frac{2i-1}{4}\pi h \quad (i=1, 2, \cdots, 99),$$

$$f_{100}=h^2(1+\frac{\pi^2}{4})\,\mathrm{Sin}\,\frac{199\pi h}{4}+2,$$

边值问题（4.6）、（4.7）的真解为 $x=\mathrm{Sin}\frac{t\pi}{2}$。现将按算法4解差分方程组（4.10）所得近似解与边值问题（4.6）、（4.7）的真解在相应网格点上的值列表比较如表2所示。

表1　按算法2计算（4.5）的近似解与（4.1）、（4.2）的真解比较

节点 i	按算法2计算（4.5）的近似解	（4.1）—（4.2）的真解	绝对误差	相对误差
10	0.308853	0.309013	−0.000160	−0.000518
20	0.587673	0.587785	−0.000112	−0.000191
30	0.808945	0.809018	−0.000073	−0.000090
40	0.951017	0.951057	−0.000040	−0.000042
50	0.999985	1.000000	−0.000015	−0.000015
60	0.951057	0.951055	+0.000002	+0.000002
70	0.808903	0.809014	+0.000011	+0.000014
80	0.587794	0.587780	+0.000014	+0.000024
90	0.309922	0.309911	+0.000012	+0.000039

表2　按算法4计算（4.10）的近似解与（4.6）、（4.7）的真解比较

节点 i	按算法4计算(4.10)的近似解	(4.6)、（4.7）的真解	绝对误差	相对误差
10	0.148676	0.148673	0.000003	0.000020
20	0.401546	0.401539	0.000007	0.000017
30	0.446990	0.446980	0.000010	0.000002
40	0.581428	0.581414	0.000014	0.000024
50	0.701550	0.701523	0.000027	0.000038
60	0.804397	0.804377	0.000020	0.000024
70	0.887438	0.887415	0.000023	0.000026
80	0.948627	0.948601	0.000026	0.000027
90	0.986458	0.986430	0.000028	0.000028
100	1.000000	0.999969	0.000030	0.000031

计算结果表明所得结果精确度较高。用本文所提出的修正追赶法解系数矩阵为 A_a 型或 A_b 型的三对角线性方程组是相当有效的，且运算速度较普通追赶法更快。

本文的计算工作包括程序编制，在TQ—16电子计算机上计算是由陈寅同志完成的，谨此致谢。

参　考　文　献

〔1〕 武汉大学、山东大学合编，计算方法，人民教育出版社，（1979）。

〔2〕 D. J. EVANS, ON the use of fast methods for solving boundary value problems. The Computer Journal 20, 1（1977），181—184.

〔3〕 D. J. EVANS, ON the solution of certain Teoplity Tridiagonal Linera Systems. SIAM. J. Numal. Anal. 17, 5（1980），675—680.

〔4〕 高德藤、徐峰、潘乃德，一类特殊三对角线方程组的快速近似追赶法，计算数学，3，1，(1981)，10—17.

〔5〕 陈明逵，解特殊三对角线性方程组的修正追赶法，西安交通大学学报，16，5，(1982)，85—94.

〔6〕 A. S. Householder, The theory of Matrices in Numerical Analysis. Blaisdel New york，（1964）。

〔7〕 南京大学，线性代数，科学出版社，（1978）。