

文章编号: 1000-5013(2009)04-0394-05

# 正交复数 B 样条插值新方法

郑力新<sup>1</sup>, 周凯汀<sup>1</sup>, 林福泳<sup>2</sup>

(1. 华侨大学 信息科学与工程学院;

2. 华侨大学 机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究利用复函数组 $\{\xi_k(x) = e^{ikx}\}$ 的正交性, 构造插值区域新的正交插值基函数, 即正交复数 B 样条插值基函数, 并给出任意阶正交复数 B 样条插值系数的通用计算公式. 通过构造新的正交基, 解除插值基及插值系数之间的耦合, 将样条插值问题从求解  $N \times N$  矩阵简化为使用一个显式公式直接同时求解, 实现插值系数的并行计算.

关键词: 插值; 样条函数; 正交函数; 复值函数; 并行计算

中图分类号: TB 115; O 241.3

文献标识码: A

插值是工程领域的典型问题<sup>[1-3]</sup>. 较常用的函数插值方法, 有线性插值、多项式插值及样条插值. 其中, 样条插值的优点是, 用幂次较低的多项式函数来获得插值的高阶精确性. 它不仅通过已知结点, 而且拟合曲线在各点光滑连续, 插值效果远大于其他插值方式. 样条函数是一种隐式格式, 最后需要解一个稀疏多对角矩阵系数方程组, 其定型的方法是追赶法. 追赶法降低了求解方程组的计算复杂度, 提高了求解速度, 但不是并行算法, 而是一种基于迭代的求解方式. 构造样条正交基是解除插值系数耦合, 实现并行计算的途径之一. 文[4-5]介绍了一种实用的正交多项式样条基函数, 文[6-7]介绍了另一种正交多项式样条基函数. 这两种正交多项式样条基函数均属于一类逐点正交的样条基, 分别称为 U 基和 V 基. 文[8]提出了另一类按周期正交, 只包含有限个正交样条函数的样条基. 本文利用复函数组的正交性, 构造了一组新的按周期正交的复数 B 样条.

## 1 任意阶正交复数 B 样条基的构造

对于周期区域 $[a, b]$ 上给定的一个分划 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ , B 样条函数  $B_{l,m}(x)$  由以下递推关系确定, 有

$$B_{l,1}(x) = \begin{cases} 1, & x_l \leq x \leq x_{l+1}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$
$$B_{l,m}(x) = \frac{x - x_l}{x_{l+m-1} - x_l} B_{l,m-1}(x) + \frac{x_{l+m} - x}{x_{l+m} - x_{l+1}} B_{l+1,m-1}(x).$$

其中,  $m$  为样条的阶数.

令  $\varphi_l(x) = B_{l,m}(x)$ , 则函数系 $\{\varphi_l(x), l = 0, 1, \dots, N-1\}$ 在 $[a, b]$ 上线性无关, 而且构成  $m$  阶样条函数空间  $S_m(\Delta)$  的一组基底. 此组基即为基本的 B 样条基.

对于区间 $[0, 2\pi]$ 上给定的  $N$  个等距结点 $\{x_l = 2\pi l/N, l = 0, 1, \dots, N-1\}$ , 其复值函数组 $\{\xi_k(x) = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx, k = 0, 1, \dots, N-1\}$ 满足<sup>[9]</sup>

$$(\xi_k, \xi_l) = \sum_{l=0}^{N-1} \xi_k(x_l) \xi_l(x_l)^* =$$

收稿日期: 2008-07-30

通信作者: 郑力新(1968-), 男, 教授, 主要从事数值逼近及信号处理的研究. E-mail: zlxzkt@yahoo.com.cn.

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目(207145); 国务院侨办科研基金资助项目(07QZR02); 福建省自然科学基金资助项目(A0610019); 福建省高等学校新世纪优秀人才支持计划项目(07FJRC01)

$$\sum_{l=0}^{N-1} \exp[i(k-j) \frac{2\pi l}{N}] = \begin{cases} 0, & k \neq j, \quad k, j = 0, 1, \dots, N-1; \\ N, & k = j, \quad k, j = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

所以, 复函数组  $\{\xi_k(x) = e^{ikx}, k = 0, 1, \dots, N-1\}$  在点集  $\{x_l = 2\pi l/N, l = 0, 1, \dots, N-1\}$  上正交. 若能运用此复函数向量组将基本的 B 样条基正交化, 利用正交函数的性质将能有效简化插值系数的求解. 为此构造正交复数 B 样条基如下

$$C_p^{N,m}(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \exp(i \frac{2pl\pi}{N}) \varphi_l(x), \quad p = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

其中,  $m$  为样条的阶数. 根据复函数组  $\{\xi_k(x) = e^{ikx}, k = 0, 1, \dots, N-1\}$  以及 B 样条基性质, 上述函数有

$$\int_a^b C_p^{N,m}(x) C_q^{N,m}(x)^* dx = 0, \quad \forall p \neq q.$$

因此, 复数 B-样条函数组 (1) 在  $[a, b]$  上构成了一组正交函数系.

## 2 正交复数 B 样条插值系数的计算

给定  $N$  个取样点, 周期区域  $[a, b]$  内任何连续函数均可由正交复数 B 样条基函数逼近. 即

$$f(x) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p C_p^{N,m}(x) + e(x), \quad e(x) = f(x) - \sum_{p=0}^{N-1} a_p C_p^{N,m}(x).$$

方程两边同乘以  $C_p^{N,m}(x)^*$ , 并在  $[a, b]$  区间积分, 同时令误差  $e(x)$  项的积分值等于零, 可得到

$$a_p = \frac{\int_a^b f(x) C_p^{N,m}(x)^* dx}{\int_a^b C_p^{N,m}(x) C_p^{N,m}(x)^* dx}, \quad p = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2)$$

此式即为正交复数 B 样条基插值系数的计算公式. 逼近函数变为

$$f(x) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p C_p^{N,m}(x). \quad (3)$$

其中, 插值系数  $a_p$  由 (2) 确定.

## 3 插值点函数值的计算

插值系数  $a_p$  按式 (2) 计算后, 其插值点函数值可按式 (3) 计算. 记插值点位置为  $x \in [a, b]$ , 令  $y = \frac{N}{b-a}(x - x_0)$ , 则  $x = x_0 + \frac{b-a}{N}y$ . 令  $l = \text{floor}(y)$ , floor 表示朝负无穷大方向取整. 所以  $l$  为一整数, 且  $l \in [0, N-1]$ . 按式 (3), 有

$$f(x) = f(x_0 + \frac{b-a}{N}y) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \sum_{l=0}^{N-1} \exp(i \frac{2pl\pi}{N}) \varphi_l[x_0 + \frac{b-a}{N}y] = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \sum_{l=0}^{N-1} \exp(i \frac{2pl\pi}{N}) B_{0,3}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)].$$

对于三阶样条, 令  $x_1 = y-l, x_2 = y-(l-1), x_3 = y-(l-2), 0 \leq x_1 \leq 1, 1 \leq x_2 \leq 2, 2 \leq x_3 \leq 3$ . 则有

$$f(x) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \sum_{l=l-3}^{l-1} \exp(i \frac{2pl\pi}{N}) B_{0,3}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)] = \sum_{p=0}^{N-1} a_p [\exp(i \frac{2pl'\pi}{N}) B_{0,3}(x_0 + \frac{b-a}{N}x_1) + \exp(i \frac{2p(l-1)\pi}{N}) \times B_{0,3}(x_0 + \frac{b-a}{N}x_2) + \exp(i \frac{2p(l-2)\pi}{N}) B_{0,3}(x_0 + \frac{b-a}{N}x_3)]. \quad (4)$$

其中,  $B_{0,3}(x_0 + \frac{b-a}{N}x_1) = \frac{1}{2}x_1^2, B_{0,3}(x_0 + \frac{b-a}{N}x_2) = -x_2^2 + 3x_2 - \frac{3}{2}, B_{0,3}(x_0 + \frac{b-a}{N}x_3) = \frac{1}{2}x_3^2 - 3x_3 +$

$\frac{9}{2}$ . 对于四阶样条, 令  $x_1 = y-l, x_2 = y-(l-1), x_3 = y-(l-2), x_4 = y-(l-3), 0 \leq x_1 \leq 1, 1 \leq x_2 \leq 2, 2 \leq x_3 \leq 3, 3 \leq x_4 \leq 4$ . 则有

$$f(x) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \sum_{l=l-4}^{l-1} \exp(i \frac{2pl\pi}{N}) B_{0,4}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)] =$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} a_p \left[ \exp(i \frac{2p\ell'\pi}{N}) B_{0,4}(x_0 + \frac{b-a}{N} x_1) + \exp(i \frac{2p(\ell'-1)\pi}{N}) B_{0,4}(x_0 + \frac{b-a}{N} x_2) + \right. \\ \left. \exp(i \frac{2p(\ell'-2)\pi}{N}) B_{0,4}(x_0 + \frac{b-a}{N} x_3) + \exp(i \frac{2p(\ell'-3)\pi}{N}) B_{0,4}(x_0 + \frac{b-a}{N} x_4) \right]. \tag{5}$$

其中,  $B_{0,4}(x_0 + \frac{b-a}{N} x_1) = \frac{1}{6} x_1^3$ ,  $B_{0,4}(x_0 + \frac{b-a}{N} x_2) = -\frac{1}{6} (3x_2^3 - 12x_2^2 + 12x_2 - 4)$ ,  $B_{0,4}(x_0 + \frac{b-a}{N} x_3) = \frac{1}{6} (3x_3^3 - 24x_3^2 + 60x_3 - 44)$ ,  $B_{0,4}(x_0 + \frac{b-a}{N} x_4) = -\frac{1}{6} (3x_4^3 - 12x_4^2 + 48x_4 - 64)$ .

4 实例

对一测量序列{1 2. 5}, {2 1. 5}, {3 2}, {4 4}, {5 2}, {6 - 1}, {7 1}, 分别用提出的三阶、四阶正交 B 样条基函数插值. 如前文的设定  $x = x_0 + \frac{b-a}{N} y$ , 则  $dx = \frac{b-a}{N} dy$ . 当  $x = x_0 = a, y = 0$ ; 当  $x = x_N = b, y = N$ . 令  $z = \frac{x-x_0}{b-a} \cdot N$ . 三阶 B 样条基函数: 当  $0 \leq z \leq 1$  时,  $B_{0,3}(z) = \frac{1}{2} z^2$ ; 当  $1 \leq z \leq 2$  时,  $B_{0,3}(z) = -z^2 + 3z - \frac{3}{2}$ ; 而当  $2 \leq z \leq 3$  时,  $B_{0,3}(z) = \frac{1}{2} z^2 - 3z + \frac{9}{2}$ . 式(2)的分子项为

$$\int_a^b f(x) C_p^{N,m}(x)^* dx = \frac{b-a}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-i \frac{2pl\pi}{N}) \int_0^N f(x_0 + \frac{b-a}{N} y) \varphi_l(x_0 + \frac{b-a}{N} y) dy = \\ \frac{b-a}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-i \frac{2pl\pi}{N}) \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N} y) B_{0,3}[x_0 + \frac{b-a}{N} (y-l)] = \\ \frac{b-a}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N} y) \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-i \frac{2pl\pi}{N}) B_{0,3}[x_0 + \frac{b-a}{N} (y-l)].$$

当  $y = l+1$  和  $y = l+2$  时,  $B_{0,3}[x_0 + \frac{b-a}{N} (y-l)] = \frac{1}{2}$ ; 其他情况下,  $B_{0,3}[x_0 + \frac{b-a}{N} (y-l)] = 0$  即有

$$\frac{b-a}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N} y) \sum_{l=y-2}^{l=y-1} \exp(-i \frac{2pl\pi}{N}) B_{0,3}[x_0 + \frac{b-a}{N} (y-l)] = \\ \frac{b-a}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N} y) \left[ \frac{1}{2} \exp(-i \frac{2p(y-2)\pi}{N}) + \frac{1}{2} \exp(-i \frac{2p(y-1)\pi}{N}) \right] = \\ \frac{b-a}{N} \exp(i \frac{3p\pi}{N}) \cos \frac{p\pi}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N} y) \exp(-i \frac{2py\pi}{N}).$$

式(2)的分母项为

$$\int_a^b C_p^{N,m}(x) C_p^{N,m}(x)^* dx = (b-a) (\frac{1}{2} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{1}{2}).$$

于是, 有

$$a_p = \frac{\exp(i \frac{3p\pi}{N}) \cos \frac{p\pi}{N} [\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N} y) \exp(-i \frac{2py\pi}{N})]}{(\frac{1}{2} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{1}{2})} = \\ \frac{\exp(i \frac{3p\pi}{N}) \cos \frac{p\pi}{N} \text{DFT}\{f(x_0 + \frac{b-a}{N} y)\}_p}{(\frac{1}{2} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{1}{2})}. \tag{6}$$

式(6)便是三阶正交复数 B 样条插值系数的并行计算公式. 其中, DFT 表示求离散傅里叶变换, 可通过快速傅里叶变换(FFT)实现快速算法. 将  $p = 0, 1, 2, \dots, N-1$  代入上式, 可解得

$$[a_0] = [1.7143], \\ [a_1 \ a_2 \ a_3] = [0.5913 - 0.3902i \ -1.2239 - 0.0153i \ 0.2754 + 0.1614i], \\ [a_4 \ a_5 \ a_6] = [0.2754 - 0.1614i \ -1.2239 - 0.0153i \ 0.5913 + 0.3902i].$$

四阶样条函数为

$$B_{0,3}(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}z^3, & 0 \leq z \leq 1; \\ -\frac{1}{6}(3z^3 - 12z^2 + 12z - 4), & 1 \leq z \leq 2; \\ \frac{1}{6}(3z^3 - 24z^2 + 60z - 44), & 2 \leq z \leq 3; \\ -\frac{1}{6}(z^3 - 12z^2 + 48z - 64), & 3 \leq z \leq 4. \end{cases}$$

式(2)的分子项为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) C_p^{N,m}(x)^* dx &= \frac{b-a}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-i \frac{2pl\pi}{N}) \int_a^b f(x_0 + \frac{b-a}{N}y) \varphi_l(x_0 + \frac{b-a}{N}y) dy = \\ &= \frac{b-a}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-i \frac{2pl\pi}{N}) \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N}y) B_{0,4}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)] = \\ &= \frac{b-a}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N}y) \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-i \frac{2pl\pi}{N}) B_{0,4}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)]. \end{aligned}$$

当  $y = l+1$  和  $y = l+3$  时,  $B_{0,4}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)] = \frac{1}{6}$ ; 当  $y = l+2$  时,  $B_{0,4}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)] = \frac{2}{3}$ ; 而其

他情况下,  $B_{0,4}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)] = 0$ . 所以有

$$\begin{aligned} &\frac{b-a}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N}y) \sum_{l=y-3}^{y-1} \exp(-i \frac{2pl\pi}{N}) B_{0,4}[x_0 + \frac{b-a}{N}(y-l)] = \\ &= \frac{b-a}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N}y) (\frac{1}{6} \exp[-i \frac{2p(y-3)\pi}{N}] + \frac{2}{3} \exp[-i \frac{2p(y-2)\pi}{N}] + \\ &\quad \frac{1}{6} \exp[-i \frac{2p(y-1)\pi}{N}]) = \frac{b-a}{N} \exp(i \frac{4p\pi}{N}) (\frac{1}{3} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{2}{3}) \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N}y) \exp(-i \frac{2py\pi}{N}). \end{aligned}$$

式(2)的分母项为,

$$\int_a^b C_p^{N,m}(x) C_p^{N,m}(x)^* dx = (b-a) (\frac{1}{18} \cos \frac{4p\pi}{N} + \frac{4}{9} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{1}{2}).$$

于是, 有

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{\exp(i \frac{4p\pi}{N}) (\frac{1}{3} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{2}{3}) [\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x_0 + \frac{b-a}{N}y) \exp(-i \frac{2py\pi}{N})]}{(\frac{1}{18} \cos \frac{4p\pi}{N} + \frac{4}{9} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{1}{2})} = \\ &= \frac{\exp(i \frac{4p\pi}{N}) (\frac{1}{3} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{1}{3}) \text{DFT}\{f(x_0 + \frac{b-a}{N}y)\}_p}{(\frac{1}{18} \cos \frac{4p\pi}{N} + \frac{4}{9} \cos \frac{2p\pi}{N} + \frac{1}{2})}. \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)便是四阶正交复数 B 样条插值系数的并行计算公式. 将  $p = 0, 1, 2, \dots, N-1$  代入上式, 可解得

$$a_0 = [1.7143],$$

$$[a_1 \quad a_2 \quad a_3] = [0.7233 - 0.0979i \quad -0.7904 - 1.0170i \quad -0.0583 + 0.1849i],$$

$$[a_4 \quad a_5 \quad a_6] = [-0.0583 - 0.1849i \quad -0.7904 + 1.0170i \quad 0.7233 + 0.0979i].$$

由解得的插值系数及逼近公式展开式(4), (5), 可以计算  $[a, b]$  内任意插值点的三阶及四阶正交复数 B 样条函数逼近值. 插值基虽然是复值函数, 但逼近实值函数  $f(x)$  的公式(3)是精确成立的, 逼近函数严格通过采样点, 误差  $e(x)$  为零.

按逼近公式(3)及其三阶与四阶得出的式(4), (5), 计算所得的函数值虽然是复数, 但复数的虚部全部为零, 实际上是实数. 插值区间  $[a, b]$  内步长为 0.1, 各插值点函数值取实部连接所得的正交复数 B 样条插值曲线, 如图 1 所示. 由  $f(x)$  的逼近公式

$$f(x) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p C_p^{N,m}(x) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \sum_{l=0}^{N-1} \exp(i \frac{2pl\pi}{N}) \varphi_l(x) = \sum_{p=0}^{N-1} a_p \sum_{l=0}^{N-1} \exp(i \frac{2pl\pi}{N}) B_{l,m}(x),$$

可知  $f(x)$  的连续性等性质决定于其中唯一含有自变量  $x$  的函数项. 即其中的基本 B 样条基  $B_{l,m}(x)$ .

$m$  阶基本 B 样条基可实现  $(m-2)$  阶导数连续.

5 结 论

任意阶 B 样条等距结点插值, 都可以使用通用式 (2) 得出类似 (6), (7) 的并行公式, 无需迭代地并行计算插值系数. 然后, 将所采用阶数的 B 样条函数代入式 (3) 得出相应的展开式, 再由展开式计算插值点函数值. 式 (3) 为通过结点的 B 样条插值曲线函数表达通式. 如果要保证端点的切线方向, 只要沿切线方向增加结点即可.

所提出的方法通过构造插值区间的正交复数 B 样条基函数 (1), 克服了基本 B 样条基插值系数之间的耦合. 将样条插值问题从求解矩阵, 简化为可以直接同时使用的一个显式的计算公式, 实现插值系数的并行计算, 为求解样条插值问题提供了一个新的思路.

参考文献:

[ 1 ] 李淑清. 基于 VB 的液压实验数据采集及处理系统[ J ]. 机械设计与制造, 2008( 6 ): 91- 93.  
[ 2 ] 杨云峰, 苏志勋, 胡金燕. 一种保持边缘特征的图像插值方法[ J ]. 中国图象图形学报, 2005, 10( 10 ): 1248- 1251.  
[ 3 ] 王佳斌, 戴在平. 温补晶振的一种实现方法[ J ]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2007, 28( 4 ): 376- 378.  
[ 4 ] 蔡占川, 孙 伟, 齐东旭. 基于正交完备 U- 系统的图形分类与识别方法[ J ]. 软件学报, 2006, 17( S1 ): 21- 27.  
[ 5 ] 齐东旭, 陶尘钧, 宋瑞霞, 等. 基于正交完备 U- 系统的参数曲线图组表达[ J ]. 计算机学报, 2006, 29( 5 ): 778- 784.  
[ 6 ] 梁延研, 宋瑞霞, 王小春, 等. 完备正交 V- 系统及其在几何信息重构中的应用[ J ]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19( 7 ): 871- 875.  
[ 7 ] 宋瑞霞. 三角域上一类正交函数系的构造[ J ]. 系统科学与数学, 2008, 28( 8 ): 949- 960.  
[ 8 ] 林福泳. 正交样条的多分辨分析方法[ J ]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2005, 26( 2 ): 180- 183.  
[ 9 ] 颜庆津. 数值分析[ M ]. 修订版. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2000: 178- 178.

A New Interpolation Method by Orthogonal Complex B- Spline

ZHENG Li-xin<sup>1</sup>, ZHOU Kai-ting<sup>1</sup>, LIN Fu-yong<sup>2</sup>

( 1. College of Information Science and Engineering, Huaqiao University;  
2. College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Quanzhou, 362021, China)

**Abstract:** By using the orthogonal property of the complex function group  $\{ \xi_k(x) = e^{ikx} \}$ , new orthogonal basis functions, i. e. orthogonal complex B-spline basis functions in the interpolation region are successively constructed. A general formula to compute coefficients of the orthogonal complex B-spline interpolation basis functions of arbitrary order is given. By constructing new orthogonal basis functions, the new method removes coupling of both the existing interpolation basis functions and the interpolation coefficients, and simplifies the interpolation task from solving a  $N \times N$  matrix to simultaneously using one explicit computation formula directly. This realizes parallel computation of the interpolation coefficients.

**Keywords:** interpolation; spline; orthogonal functions; complex function; parallel computation

( 责任编辑: 鲁 斌 英文审校: 吴逢铁 )

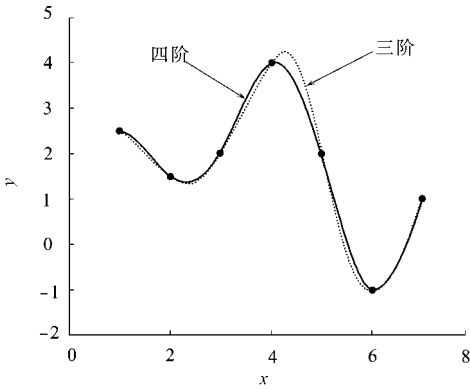


图 1 正交复数 B 样条插值曲线  
Fig. 1 Interpolation curves of orthogonal complex B-splines