第 33 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 33　No. 2
2012 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2012

文章编号： 1000-5013(2012)02-0218-07

脉冲时滞 Lotka-Volterra 食物链系统的正周期解

陈应生，汪东树

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 利用一些分析技巧和重合度理论，得到一类具有脉冲和时滞 Lotka-Volterra 食物链系统存在正周期解的新结果. 所得的结论表明：脉冲是对该食物链系统正周期解存在性是有影响的. 特别地，在每个种群的内禀增长率(出生率 a_1 和死亡率 a_2, a_3)、种群间相互作用率(捕食率 $b_{1,2}$, $b_{2,3}$ 和消化率 $b_{2,1}$, $b_{3,2}$)，以及非线性种内干扰反应系数 $\alpha_{i,j}$ 都确定的情况下，可以通过适当控制每个种群的(投放率或收回率)$h_{i,k}$，使每个种群达到平衡(即存在正周期解).

关键词： 时滞；脉冲；Lotka-Volterra 食物链系统；周期解；重合度理论

中图分类号： O 175.6　　**文献标志码：** A

对于生物种群系统的持续生存和正周期解的存在性，许多学者已经进行了深入研究，并取得了许多结果[1-5]. 文献[1,3]分别研究了具时滞的 3 种群食物链系统，得到系统存在 ω 正周期解的一些结果. 对于种群生态学而言，脉冲效应是经常存在的，因此研究脉冲种群系统更具有实际意义. 本文利用重合度理论，研究脉冲和时滞的非自治周期 Lotka-Volterra 食物链系统

$$\left.\begin{aligned} y'_1(t) &= y_1(t)[a_1(t)-b_{1,1}(t)y_1^{\alpha_{1,1}}(t-\tau_{1,1}(t))-b_{1,2}(t)y_2^{\alpha_{1,2}}(t-\tau_{1,2}(t))], \\ y'_2(t) &= y_2(t)[-a_2(t)+b_{2,1}(t)y_1^{\alpha_{2,1}}(t-\tau_{2,1}(t))-b_{2,3}(t)y_3^{\alpha_{2,3}}(t-\tau_{2,3}(t))], \qquad t\neq t_k, \\ y'_3(t) &= y_3(t)[-a_1(t)+b_{3,2}(t)y_2^{\alpha_{3,2}}(t-\tau_{3,2}(t))], \\ \Delta y_i(t_k) &= y_i(t_k^+)-y_i(t_k^-)=h_{i,k}y_i(t_k), \qquad i=1,2;\quad k=\pm1,\pm2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的正周期解的存在性问题. 系统(1)满足以下 3 个假设：1) $0<t_1<t_2<\cdots<t_p<\omega$, $t_{k+p}=t_k+\omega$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$，$k=1,2,\cdots$；2) $\{h_{i,k}\}$ 是一个实序列 $h_{i,k}$，可看成是种群 x_i 在 t_k 时刻的出生率或收获比率，且 $h_{i,k}>-1$, $h_{i,k}=h_{i,(k+p)}$, $i=1,2,3$, $k=1,2,\cdots$；3) $a_i(t)$, $b_{i,j}(t)$, $\tau_{i,j}(t)$ 是非负连续的 ω 周期函数，且满足 $\int_0^\omega b_{i,j}(t)\mathrm{d}t>0$；$\alpha_{i,j}$ 是正常数，$i,j=1,2,3$.

1　预备知识

设 X, Z 是赋范向量空间，L：Dom $L\subset X\to Z$ 为线性映射，N：$X\to Z$ 连续映射. 若 dim ker L = co dim Im $L<+\infty$，且 Im L 为 Z 中闭子集，则称 L 为指标为零的 Fredholm 映射. 如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射，且存在连续投影 P：$X\to X$ 及 Q：$Z\to Z$，使得 Im P = Ker L，Im L = Ker Q = Im$(I-Q)$，X = Ker $L\oplus$Ker P 和 Z = Im $L\oplus$Im Q，则 $L_p\triangleq L|_{\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P}$：Dom $L\cap$Ker $P\to$Im L 可逆.

设逆映射为 K_P，Ω 为 X 中的有界开集，若 QN：$\bar{\Omega}\to Z$ 与 $K_P(I-Q)N$：$\bar{\Omega}\to X$ 都是紧的，则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的. 由于 Im Q 与 Ker L 同构，因而存在同构映射 J：Im $Q\to$Ker L.

引理 1[6]　设 X, Z, L, N 如上定义，而且 L 是指标为零的 Fredholm 映射. 又设 Ω 为 X 中的有界开集，N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的. 假设

1) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$，方程 $Lx=\lambda Nx$ 的解满足 $x\notin\partial\Omega(\partial\Omega=\bar{\Omega}/\Omega)$；

收稿日期： 2011-05-25
通信作者： 陈应生(1976-)，男，讲师，主要从事常微分及泛函微分方程的研究. E-mail：cyssheng@hqu.edu.cn.
基金项目： 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)；福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

2）对任意的 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$，$QNx\neq 0$；

3）Brouwer 度 $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}\neq 0$，$J,Q$ 如上定义，则方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{Dom}\,L\cap\bar{\Omega}$ 内至少存在一个解.

若 $f(t)$ 是一连续的 ω-周期函数，记 $\bar{f}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)\mathrm{d}t$. 为了方便叙述，引入下面记号

$$R_1=\bar{a}_1+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{1,k}),\qquad R_2=\bar{a}_2-\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k}),$$

$$R_3=\bar{a}_3-\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{3,k}),\qquad m_1=\frac{1}{\alpha_{1,1}}\ln\frac{R_1}{b_{1,1}},$$

$$m_2=\min\{\frac{1}{\alpha_{1,2}}\ln\frac{R_1}{b_{1,2}},\frac{1}{\alpha_{3,2}}\ln\frac{R_3}{b_{3,2}}\},\qquad m_3=\frac{1}{\alpha_{2,3}}\ln\frac{\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_1)-R_2}{b_{2,3}},$$

$$H_1=m_1+\frac{1}{2}\omega(R_1+\bar{\alpha}_1)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{1,k})|,$$

$$H_2=m_2+\omega\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_1)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+h_{2,k})|+\ln(1+h_{2,k})],$$

$$H_3=m_3+\omega\bar{\alpha}_3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+h_{3,k})|+\ln(1+h_{3,k})],$$

$$H_4=\frac{1}{\alpha_{1,1}}\ln\frac{R_1-\bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}H_2)}{b_{1,1}}-\frac{1}{2}\omega(R_1+\bar{\alpha}_1)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{1,k})|.$$

为运用重合度理论证明主要的结论，需要引入一些函数空间. 记

$$\begin{aligned}PC(\mathbf{R},\mathbf{R})=\{&\psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\text{对于 }t\in\mathbf{R},t\neq t_k,\psi(t)\text{ 是连续的},\\&\text{且当 }t\in\mathbf{R},t\neq t_k\text{ 时是左连续的},\psi(t_k^+)\text{ 存在},k=\pm1,\pm2,\cdots\},\end{aligned}$$

$$PC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})=\{\psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \psi'(t)\in PC(\mathbf{R},\mathbf{R})\},$$

$$PC([0,\omega],\mathbf{R})=\{\psi(t)\in PC(\mathbf{R},\mathbf{R}):\psi(t+\omega)=\psi(t),t\in\mathbf{R}\}.$$

取 $X=\{\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^{\mathrm{T}}\mid x_i\in PC([0,\omega],\mathbf{R}),x_i(t+\omega)=x_i(t),\forall t\in\mathbf{R},i=1,2,3\}$ 和 $Z=X\times\mathbf{R}^{3,p}$，这里 $\mathbf{R}^{3,p}=\underbrace{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\times\cdots\times\mathbf{R}^3}_{p}$. 另取范数

$$\|\boldsymbol{x}\|=\max\{\sup_{t\in[0,\omega]}|x_1(t)|,\sup_{t\in[0,\omega]}|x_2(t)|,\sup_{t\in[0,\omega]}|x_3(t)|\},\qquad \boldsymbol{x}\in X;$$

$$\|\boldsymbol{z}\|=\|\boldsymbol{x}\|+\sum_{k=1}^{p}\|\boldsymbol{r}_k\|,\qquad \boldsymbol{x}=(x,r_1,r_2,\cdots,r_p)\in Z.$$

其中：$\boldsymbol{r}_k=(r_{1,k},r_{2,k},r_{3,k})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3$，$\|\boldsymbol{r}_k\|=\max\{|r_{1,k}|,|r_{2,k}|,|r_{3,k}|\}$，$k=1,2,\cdots,p$，则 $(X,\|\cdot\|)$ 和 $(Z,\|\cdot\|)$ 都是 Banach 空间.

定义 1　如果 $y_1(t),y_2(t),y_3(t)\in PC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$，使得 $(y_1(t),y_2(t),y_3(t))^{\mathrm{T}}$ 满足系统(1)，则称 $(y_1(t),y_2(t),y_3(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统(1)的解.

引理 2[7]　若函数 $f(t)\in PC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$，那么

$$\left|\sup_{s\in[0,\omega]}f(s)-\inf_{s\in[0,\omega]}f(s)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_0^\omega|f'(s)|\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}|\Delta f(t_k)|\right].$$

2　正周期解存在性

定理 1　在系统(1)中，若系数函数满足 $R_1>\bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}H_2)$，$\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_4)>R_2$，以及 $R_3>0$，则系统(1)至少存在一个 ω 正周期解.

证明　变换 $y_i(t)=\exp\{x_i(t)\}$，$i=1,2,3$，则系统(1)可化为

$$\left.\begin{aligned}x'_1(t)&=a_1(t)-b_{1,1}(t)\exp(\alpha_{1,1}x_1(t-\tau_{1,1}(t)))-b_{1,2}(t)\exp(\alpha_{1,2}x_2(t-\tau_{1,2}(t))),\\x'_2(t)&=-a_2(t)+b_{2,1}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t)))-\\&\quad b_{2,3}(t)\exp(\alpha_{2,3}x_3(t-\tau_{2,3}(t))),\qquad t\neq t_k,\\x'_3(t)&=-a_3(t)+b_{3,2}(t)\exp(\alpha_{3,2}x_2(t-\tau_{3,2}(t))),\\\Delta x_i(t_k)&=\ln(1+h_{i,k}),\qquad i=1,2,3,\quad k=\pm1,\pm2,\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

记 $$A_1(t,\boldsymbol{x}(t)) = a_1(t) - b_{1,1}(t)\exp(\alpha_{1,1}x_1(t-\tau_{1,1}(t))) - b_{1,2}(t)\exp(\alpha_{1,2}x_2(t-\tau_{1,2}(t))),$$
$$A_2(t,\boldsymbol{x}(t)) = - a_2(t) + b_{2,1}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t))) - b_{2,3}(t)\exp(\alpha_{2,3}x_3(t-\tau_{2,3}(t))),$$
$$A_3(t,\boldsymbol{x}(t)) = - a_3(t) + b_{3,2}(t)\exp(\alpha_{3,2}x_2(t-\tau_{3,2}(t))),$$
$$B_{i,k} = \ln(1+h_{i,k}),$$
$$\Delta\boldsymbol{x}(t_k) = (\Delta x_1(t_k),\Delta x_2(t_k),\Delta x_3(t_k))^{\mathrm{T}}, \qquad i=1,2,\cdots,p.$$

显然,如果系统(1)有一个ω-周期解$(x_1^*(t),x_2^*(t),x_3^*(t))^{\mathrm{T}}$,那么就有$(y_1^*(t),y_2^*(t),y_3^*(t))^{\mathrm{T}} = (\exp(x_1^*(t)),\exp(x_2^*(t)),\exp(x_3^*(t)))^{\mathrm{T}}$就是系统(1)的正的$\omega$-周期解.因此,只须证明系统(1)存在一个$\omega$-周期解.

现定义线性算子L:$\mathrm{Dom}\, L \subset X \to Z$为
$$\boldsymbol{x} \to (x',\Delta\boldsymbol{x}(t_1),\cdots,\Delta\boldsymbol{x}(t_p)), \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{Dom}\, L \subset X; \tag{3}$$
又定义算子N:$X\to Z$为
$$\left(\begin{pmatrix} A_1(t,\boldsymbol{x}(t)) \\ A_2(t,\boldsymbol{x}(t)) \\ A_3(t,\boldsymbol{x}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \\ B_{3,1} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} B_{1,p} \\ B_{2,p} \\ B_{3,p} \end{pmatrix}\right), \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}} \in X. \tag{4}$$
又定义投影算子P:$X\to X$及Q:$Z\to Z$为
$$P\boldsymbol{x} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}} \in X.$$
$$Q\boldsymbol{z} = Q(\boldsymbol{x},d_1,\cdots,d_p) = (\frac{1}{\omega}(\int_0^{\omega}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}d_k),0,\cdots,0), \qquad \forall\, \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x},d_1,\cdots,d_p) \in Z.$$

易见$\mathrm{Ker}\, L = \{\boldsymbol{z}\in X:\boldsymbol{x} = h(\text{常值向量})\in \mathbf{R}\}$,$\mathrm{Im}\, L = \{\boldsymbol{z}:\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x},d_1,\cdots,d_p)\in Z:\int_0^{\omega}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}d_k = 0\}$为$Z$中的闭子集,且$\dim\,\mathrm{Ker}\, L = 3 = \mathrm{co}\dim\,\mathrm{Im}\, L$,故$L$是指标为零的Fredholm映射.

P,Q是连续投影且使得$\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Ker}\, L$,$\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Ker}\, Q = \mathrm{Im}(I-Q)$,$X = \mathrm{Ker}\, L \oplus \mathrm{Ker}\, P$,$Z = \mathrm{Im}\, L \oplus \mathrm{Im}\, Q$. 记$L_p \triangleq L|_{\mathrm{Dom}\, L\cap \mathrm{Ker}\, P}$,则$L_p$:$\mathrm{Dom}\, L\cap\mathrm{Ker}\, P \to \mathrm{Im}\, L$是到上的一一映射.因此,$L$的广义逆映射$K_P$:$\mathrm{Im}\, L \to \mathrm{Dom}\, L\cap \mathrm{Ker}\, P$存在,且
$$K_p(z(t)) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s + \sum_{0<t_k<t}d_k - \frac{1}{\omega}[\int_0^{\omega}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}d_k(\omega - t_k)]. \tag{5}$$
由于有
$$Q N\boldsymbol{x} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}(\int_0^{\omega}A_1(s,x(s))\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{p}B_{1,k}) \\ \frac{1}{\omega}(\int_0^{\omega}A_2 s,x(s))\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{p}B_{2,k}) \\ \frac{1}{\omega}(\int_0^{\omega}A_3 s,x(s))\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{p}B_{3,k}) \end{pmatrix},0,\cdots,0\right), \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in X. \tag{6}$$
所以有
$$K_P(I-Q)N\boldsymbol{x} = \int_0^t Ny(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t Ny(s)\mathrm{d}s - (\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2})\int_0^{\omega}Ny(s)\mathrm{d}s.$$

由Arzela-Ascoli定理,不难证明对X中任意有界开集Ω,$QN(\bar{\Omega})K_P(I-Q)N(\bar{\Omega})$都是紧的,并且$QN(\bar{\Omega})$是有界的,从而$N$在$\bar{\Omega}$上是$L$-紧的.

对应于算子方程$L\boldsymbol{x} = \lambda N\boldsymbol{x}$,$\lambda\in(0,1)$,有
$$\left.\begin{aligned} x'_1(t) &= \lambda[a_1(t) - b_{1,1}(t)\exp(\alpha_{1,1}x_1(t-\tau_{1,1}(t))) - b_{1,2}(t)\exp(\alpha_{1,2}x_2(t-\tau_{1,2}(t)))], \\ x'_2(t) &= \lambda[-a_2(t) + b_{2,1}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t))) - \\ &\quad b_{2,3}(t)\exp(\alpha_{2,3}x_3(t-\tau_{2,3}(t)))], \qquad t\neq t_k, \\ x'_3(t) &= \lambda[-a_3(t) + b_{3,2}(t)\exp(\alpha_{3,2}x_2(t-\tau_{3,2}(t)))], \\ \Delta x_i(t_k) &= \lambda\ln(1+h_{i,k}), \qquad i=1,2,3; \quad k=\pm 1,\pm 2,\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^{\mathrm{T}}\in X$ 是系统(7)对应于某一 $\lambda\in(0,1)$ 的解，将式(7)的两端从 0 到 ω 进行积分,可得

$$\int_0^{\omega}[a_1(t)-b_{1,1}(t)\exp(\alpha_{1,1}x_1(t-\tau_{1,1}(t)))-$$
$$b_{1,2}(t)\exp(\alpha_{1,2}x_2(t-\tau_{1,2}(t)))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{1,k})=0,\tag{8}$$

$$\int_0^{\omega}[-a_2(t)+b_{2,1}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t)))-$$
$$b_{2,3}(t)\exp(\alpha_{2,3}x_3(t-\tau_{2,3}(t)))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k})=0,\tag{9}$$

$$\int_0^{\omega}[-a_3(t)+b_{3,2}(t)\exp(\alpha_{3,2}x_2(t-\tau_{3,2}(t)))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{3,k})=0.\tag{10}$$

由式(7)～(10)可得

$$\int_0^{\omega}|x'_1(t)|\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^{\omega}|a_1(t)-b_{1,1}(t)\exp(\alpha_{1,1}x_1(t-\tau_{1,1}(t)))-$$
$$b_{1,2}(t)\exp(\alpha_{1,2}x_2(t-\tau_{1,2}(t)))|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\omega}[b_{1,1}(t)\exp(\alpha_{1,1}x_1(t-\tau_{1,1}(t)))+$$
$$b_{1,2}(t)\exp(\alpha_{1,2}x_2(t-\tau_{1,2}(t)))]\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}a_1(t)\mathrm{d}t=\omega(R_1+\bar{a}_1),\tag{11}$$

$$\int_0^{\omega}|x'_2(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^{\omega}b_{2,1}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t)))\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k}),\tag{12}$$

$$\int_0^{\omega}|x'_2(t)|\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^{\omega}|-a_3(t)+b_{3,2}(t)\exp(\alpha_{3,2}x_2(t-\tau_{3,2}(t)))|\,\mathrm{d}t\leqslant\omega(R_3+\bar{a}_3).\tag{13}$$

因为 $\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in X$，故 $\sup\limits_{t\in[0,\omega]}x_i(t)$，$\inf\limits_{t\in[0,\omega]}x_i(t)$存在并且一定存在 $\eta_i\xi_i\in[0,\omega]$,使得

$$x_i(\eta_i^+)=\sup_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad \text{或 } x_i(\eta_i^-)=\inf_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad i=1,2,3.\tag{14}$$

$$x_i(\xi_i^+)=\sup_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad \text{或 } x_i(\xi_i^-)=\inf_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad i=1,2,3.\tag{15}$$

为了方便讨论，不妨设(14),(15)中的第 1 式成立,至于其他情况,则同理可得以下相同的估计.

首先估计 $x_i(t)(i=1,2,3)$的上界. 由式(9),(15)可得

$$\int_0^{\omega}[b_{1,1}(t)\exp(\alpha_{1,1}x_1(\xi_1^+))+b_{1,2}(t)\exp(\alpha_{1,2}x_2(\xi_2^+))]\mathrm{d}t\leqslant\bar{a}_1\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{1,k})=\omega R_1,\tag{16}$$

于是有

$$x_1(\xi_1^+)\leqslant\frac{1}{\alpha_{1,1}}\ln\frac{R_1}{b_{1,1}}=m_1,\qquad x_2(\xi_2^+)\leqslant\frac{1}{\alpha_{1,2}}\ln\frac{R_1}{b_{1,2}}.\tag{17}$$

因此，由引理 2 可知，当 $t\in[0,\omega]$时,有

$$x_1(t)\leqslant x_1(\xi_1^+)+\frac{1}{2}\int_0^{\omega}|x'_1(t)|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{1,k})|\leqslant H_1.\tag{18}$$

由式(10)和式(15)可得

$$\int_0^{\omega}[-a_3(t)+b_{3,2}(t)\exp(\alpha_{3,2}x_2(\xi_2^+))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{3,k})\leqslant 0.\tag{19}$$

于是有

$$x_2(\xi_2^+)\leqslant\frac{1}{\alpha_{3,2}}\ln\frac{R_3}{b_{3,2}}.\tag{20}$$

从而由式(13)与式(20)可知

$$x_2(\xi_2^+)\leqslant\min\{\frac{1}{\alpha_{1,2}}\ln\frac{R_1}{b_{1,2}},\frac{1}{\alpha_{3,2}}\ln\frac{R_3}{b_{3,2}}\}=m_2.\tag{21}$$

由式(12)，(18),(21)及引理 2 可知,当 $t\in[0,\omega]$时,有

$$x_2(t)\leqslant x_2(\xi_2^+)+\frac{1}{2}\int_0^{\omega}|x'_2(t)|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{2,k})|\leqslant$$

$$m_2+\int_0^{\omega}b_{21}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t)))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+h_{2,k})|+\ln(1+h_{2,k})]\leqslant H_2. \tag{22}$$

由式(9)和式(15)可得

$$\int_0^{\omega}[-a_2(t)+b_{21}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t)))-b_{2,3}(t)\exp(\alpha_{2,3}x_3(\xi_3^+))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k})\geqslant 0,$$

即有

$$\omega\bar{b}_{2,3}\exp(\alpha_{2,3}x_3(\xi_3^+))\leqslant\int_0^{\omega}[-a_2(t)+b_{2,1}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t)))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k})\leqslant$$

$$-\omega\bar{a}_2+\omega\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_1)+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k})=\omega(\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_1)-R_2)>0. \tag{23}$$

这里 $\omega\bar{b}_{2,1}(\exp(\alpha_{2,1}H_1)-R_2)>0$ 是由条件 $\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_4)>R_2$ 保证的，故有

$$x_3(\xi_3^+)\leqslant\frac{1}{\alpha_{2,3}}\ln\frac{\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_1)-R_2}{\bar{b}_{2,3}}=m_3. \tag{24}$$

由式(13)，(24)及引理 2 可知，当 $t\in[0,\omega]$时，有

$$x_3(t)\leqslant x_3(\xi_3^+)+\frac{1}{2}\int_0^{\omega}|x'_3(t)|\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+h_{3,k})|\leqslant H_3. \tag{25}$$

下面估计 $x_i(t)(i=1,2,3)$的下界. 由式(9)，(14)和(22)可知

$$\omega\bar{b}_{1,1}\exp(\alpha_{1,1}x_1(\eta_1^+))\geqslant\int_0^{\omega}[a_1(t)-b_{1,2}(t)\exp(\alpha_{1,2}x_2(t-\tau_{1,2}(t)))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{1,k})\geqslant$$

$$\omega\bar{a}_1-\omega\bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}H_2)+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{1k})=\omega(R_1-\bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}H_2))>0,$$

从而有

$$x_1(\eta_1^+)\geqslant\frac{1}{\alpha_{1,1}}\ln\frac{R_1-\bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}H_2)}{\bar{b}_{1,1}}. \tag{26}$$

由式(11)，(26)及引理 2 可知，当 $t\in[0,\omega]$时，有

$$x_1(t)\geqslant x_1(\eta_1^+)-\frac{1}{2}\int_0^{\omega}|x'_1(t)|\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{1,k})|\geqslant H_4. \tag{27}$$

又由式(10)和(14)可知

$$\omega\bar{b}_{32}\exp(\alpha_{3,2}x_2(\eta_2^+))\geqslant\omega\bar{a}_3-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{3,k})=\omega R_3>0.$$

从而有

$$x_2(\eta_2^+)\geqslant\frac{1}{\alpha_{3,2}}\ln\frac{R_3}{\bar{b}_{3,2}}. \tag{28}$$

于是，由式(12)，(28)及引理 2 可知，当 $t\in[0,\omega]$时，有

$$x_2(t)\geqslant x_2(\eta_2^+)-\frac{1}{2}\int_0^{\omega}|x'_2(t)|\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{2,k})|\geqslant$$

$$\frac{1}{\alpha_{3,2}}\ln\frac{R_3}{\bar{b}_{3,2}}-\omega\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_1)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}[|\ln(1+h_{2,k})|+\ln(1+h_{2,k})]\triangleq H_5. \tag{29}$$

由式(9)，(14)和式(28)可知

$$\omega\bar{b}_{2,3}\exp(\alpha_{2,3}x_3(\eta_3^+))\geqslant\int_0^{\omega}[-a_2(t)+b_{21}(t)\exp(\alpha_{2,1}x_1(t-\tau_{2,1}(t)))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k})\geqslant$$

$$\omega\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_4)-\omega\bar{a}_2+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k})=\omega(\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_4)-R_2)>0,$$

故有

$$x_3(\eta_3^+)\geqslant\frac{1}{\alpha_{2,3}}\ln\frac{\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_4)-R_2}{\bar{b}_{2,3}}. \tag{30}$$

由式(13)，(30)及引理 2 可知，当 $t\in[0,\omega]$时，有

$$x_3(t) \geqslant x_3(\eta_3^+) - \frac{1}{2}\int_0^{\omega} |x'_3(t)| \,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} |\ln(1+h_{3,k})| \geqslant$$

$$\frac{1}{\alpha_{2,3}} \ln \frac{\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}H_4) - R_2}{\bar{b}_{2,3}} - \frac{1}{2}\omega(R_1 + \bar{a}_3) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} |\ln(1+h_{3,k})| \triangleq H_6. \tag{31}$$

令 $H = 1 + \sum_{k=1}^{6} |H_k|$，由式(18),(22),(25),(27),(29),(31)的讨论可知 $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant H$.

显然，正常数 H 与 $\lambda(\lambda \in (0,1))$是无关的. 由已知条件易知，代数方程组

$$\left.\begin{aligned} \bar{b}_{1,1}\omega u_{1,11}^{\alpha} + \bar{b}_{1,2}\omega u_{1,22}^{\alpha} &= \bar{a}_1\omega + \sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{1,k}), \\ \bar{b}_{2,1}\omega u_{2,11}^{\alpha} + \bar{b}_{2,3}\omega u_{2,33}^{\alpha} &= -\bar{a}_2\omega + \sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{2,k}), \\ \bar{b}_{3,2}\omega u_{3,23}^{\alpha} &= \bar{a}_3\omega - \sum_{k=1}^{p}\ln(1+h_{3,k}) \end{aligned}\right\}$$

有唯一正解 $(u_1^*, u_2^*, u_3^*)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{3+}$，记 $M = H + C$. 其中，C 充分大使得 $\|\ln u_1^*, \ln u_2^*, \ln u_3^*\| < C$.

令 $\Omega = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in X: \|\boldsymbol{x}\| < M\}$，则 Ω 满足引理 1 中的条件 1). 当 $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} L \cap \partial\Omega$ 时，$\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的常值向量且 $\|\boldsymbol{x}\| = M$，于是有

$$QN\boldsymbol{x} = \left(\begin{pmatrix} \bar{a}_1 - \bar{b}_{1,1}\exp(\alpha_{1,1}x_1) - \bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}x_2) + \dfrac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{p} B_{1,k} \\ -\bar{a}_2 + \bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}x_1) - \bar{b}_{2,3}\exp(\alpha_{2,3}x_3) + \dfrac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{p} B_{2,k} \\ -\bar{a}_3 + \bar{b}_{3,2}\exp(\alpha_{3,2}x_2) + \dfrac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{p} B_{3,k} \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right) \neq 0,$$

即引理 1 中的条件 2)也被满足. 下面证明引理 1 中的条件 3)也成立.

取 $J: \operatorname{Im} Q \to X: (f, 0, \cdots, 0) \to f$，则当 $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} L \cap \partial\Omega$ 时，有

$$JQN\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 - \bar{b}_{1,1}\exp(\alpha_{1,1}x_1) - \bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}x_2) + \dfrac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{p} B_{1,k} \\ -\bar{a}_2 + \bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}x_1) - \bar{b}_{2,3}\exp(\alpha_{2,3}x_3) + \dfrac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{p} B_{2,k} \\ -\bar{a}_3 + \bar{b}_{3,2}\exp(\alpha_{3,2}x_2) + \dfrac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{p} B_{3,k} \end{pmatrix},$$

经计算并由定理条件可得

$$\deg\{JQN, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0\} \neq 0,$$

从而引理 1 中的条件 3)也满足. 因此，系统(1)至少有一个 ω-周期解，从而系统(1)至少存在一个正的 ω-周期解.

3　应用

下面分别考虑文献[1,3]中研究的具时滞的 3 种群食物链系统

$$\left.\begin{aligned} x'_1(t) &= x_1(t)[a_1(t) - b_{1,1}(t)x_1(t-\tau_{1,1}(t)) - b_{1,2}(t)x_2(t-\tau_{1,2}(t))], \\ x'_2(t) &= x_2(t)[-a_2(t) + b_{2,1}(t)x_1(t-\tau_{2,1}(t)) - b_{2,3}(t)x_3(t-\tau_{2,3}(t))], \\ x'_3(t) &= x_3(t)[-a_1(t) + b_{3,2}(t)x_2(t-\tau_{3,2}(t))], \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} x'_1(t) &= x_1(t)[a_1(t) - b_{1,1}(t)x_1^{\alpha_{11}}(t-\tau_{1,1}(t)) - b_{1,2}(t)x_2^{\alpha_{1,2}}(t-\tau_{1,2}(t))], \\ x'_2(t) &= x_2(t)[-a_2(t) + b_{2,1}(t)x_1^{\alpha_{2,1}}(t-\tau_{2,1}(t)) - b_{2,3}(t)x_3^{\alpha_{2,3}}(t-\tau_{2,3}(t))], \\ x'_3(t) &= x_3(t)[-a_3(t) + b_{3,2}(t)x_2^{\alpha_{3,2}}(t-\tau_{3,2}(t))]. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

由定理 1 可得如下定理 .

定理 2　如果系统(32)中的系数函数满足 $\bar{a}_1 > \bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}M_1)$，$\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}M_2) > \bar{a}_2$ 以及 $\bar{a}_3 > 0$.

其中：$M_1=\min\{\ln\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_{1,2}},\ln\frac{\bar{a}_3}{\bar{b}_{3,2}}\}+\omega\bar{b}_{2,1}\exp(\ln\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_{1,1}}+\omega\bar{a}_1)$，$M_2=\ln\frac{\bar{a}_1-\bar{b}_{1,2}\exp(M_1)}{\bar{b}_{1,1}}-\omega\bar{a}_1$，则系统(1)至少存在一个 ω 正周期解.

注 1 定理 2 的结果与文献[1]中的主要结果是不相同的，不被文献[1]中的主要结果所包括.

定理 3 如果系统(33)中的系数函数满足 $\bar{a}_1>\bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}\Delta_1)$，$\bar{b}_{2,1}\exp(\alpha_{2,1}\Delta_2)>\bar{a}_2$ 以及 $\bar{a}_3>0$. 其中：$\Delta_1=$

$$\min\{\frac{1}{\alpha_{1,2}}\ln\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_{1,2}},\frac{1}{\alpha_{3,2}}\ln\frac{\bar{a}_3}{\bar{b}_{3,2}}\}+\omega(\bar{b}_{2,1}\exp(\frac{1}{\alpha_{1,1}}\ln\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_{1,1}}+\omega\bar{a}_1)),\quad \Delta_2=\frac{1}{\alpha_{1,1}}\ln(\frac{\bar{a}_1-\bar{b}_{1,2}\exp(\alpha_{1,2}\Delta_1)}{\bar{b}_{1,1}}-\omega\bar{a}_1)$$

，则系统(33)至少存在一个 ω 正周期解.

注 2 定理 3 的条件要比文献[3]中的结果成立的条件弱得多，即结论推广并改进了文献[3]中的主要结果.

4 结束语

显然，系统(1)包含了系统(32)，(33). 利用重合度理论研究系统(1)的正周期解存在性问题，得出了脉冲对系统(1)的正周期解存在是有影响的新结果. 当应用得到的结果研究系统(32)，(33)的正周期解存在性问题时，推广并改进了文献[1,3]中的相关结果. 这一研究无论是在理论上，还是在物种保护的应用上，都具有广泛的前景和重大意义.

参考文献：

[1] 张树文，陈兰荪. 具有偏差变元的三种群食物链系统的全局正周期解的存在性[J]. 数学杂志，2003，23(1)：125-28.

[2] 汪东树，王全义. 一类具时滞和比率的扩散系统正周期解[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2006，27(4)：358-361.

[3] SHEN Chun-xia. Positive periodic solution of a kind of nonlinear food-chain system[J]. Appl Math Comp，2007，194(1)：234-242.

[4] SAITO Y. Permanence and global stability for general Lotka-Volterra predator prey systems with distributed delays[J]. Nonlinear Anal，2001，47(9)：6157-6168.

[5] KORMAN P. Some new results on the periodic competition model[J]. J Math Anal Appl，1992，171(1)：131-138.

[6] GAINES R E，MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin ：Springer-Verlag，1977：40-60.

[7] WANG Qi，DAI Bin-xiang，CHEN Yu-ming. Multiple periodic solutions of an impulsive predator-prey model with Holling-type Ⅳ functional response[J]. Math Comput Modelling，2009，49(9/10)：1829-1836.

Positive Periodic Solutions of a Lotka-Volterra Food-Chain System with Impulses and Delays

CHEN Ying-sheng，WANG Dong-shu

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract: By means of coincidence degree theory and some analysis techniques，we obtain a new result on the existence of positive periodic solutions to a Lotka-Volterra food-chain system with impulses and delays. The result showed that impulses have effects on the existence of positive periodic solutions of a Lotka-Volterra food-chain system. Especially，if the growth rate (the birthrate a_1 and the mortality a_2，a_2)，the population interacting rate (the pery rate $b_{1,2}$，$b_{2,3}$ and digest rate $b_{2,1}$，$b_{3,2}$)，and the nonlinear interference reaction coefficient ($\alpha_{i,j}$) of every one of populations are given，each population may be balanced by controlling the putting rate or recovering rate ($h_{i,k}$) of every group.

Keywords: delay；impulse；Lotka-Volterra food-chain system；positive periodic solution；coincidence degree theory

(**责任编辑：**陈志贤 **英文审校：**张金顺，黄心中)