第 33 卷 第 6 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 6
2012 年 11 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Nov. 2012

文章编号: 1000-5013(2012)06-0699-06

非线性奇异三阶两点边值问题单调正解的存在性

邹黄辉, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用锥压缩锥拉伸不动点定理及一些分析技巧, 建立一类非线性奇异三阶两点边值问题存在一个及多个单调正解的充分条件,推广和改进了前人的研究成果.

关键词: 锥; 单调正解; 边值问题; 不动点定理

中图分类号: O 175. 8 **文献标志码:** A

由于微分方程的边值问题具有广泛的应用背景, 如热传导、等离子物理、化学工程和流体力学等, 因此近年来受到许多学者的广泛关注[1-12]. 对于边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+w(t)f(t,u(t))=0, & 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=\alpha u(1)+\beta u'(1)+\gamma u''(1)=0. \end{cases} \tag{1}$$

其中:α,β,γ 是常数,满足 $\alpha/2+\beta+\gamma>0,\gamma\geqslant0,2\gamma\geqslant\alpha$. 易见,当参数 α,β,γ 取不同值时,边值问题(1)可化为其他的多种不同的边值问题,如当 $\alpha=\beta=0,\gamma=1,w(t)=1$ 时, 通过自变量 t 换元变换可知,边值问题(1)退化为文献[1]研究的边值问题. 目前,还没有边值问题(1)的单调正解的存在性的相关研究. 本文利用锥压缩锥拉伸不动点定理及一些分析技巧, 建立了边值问题(1)存在一个及多个单调正解的一些充分条件.

1 预备知识及一些引理

假设条件 H_1) $f\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$;$w(t)\in C((0,1),[0,+\infty))$成立且满足 $0<\int_0^1 w(s)\mathrm{d}s=:M<+\infty$.

注 1 显然,在条件 H_1)下, $w(t)$在 $t=0,t=1$ 处可以奇异.

先给出锥的定义. 设 X 是 Banach 空间, $K\subset X$ 非空, 且满足: 1) 对任意 $u,v\geqslant0$, 任意 $x,y\in K$, 有 $ux+vy\in K$; 2)若 $x\in K,-x\in K$, 则 $x=0$. 那么称 K 为 X 中的一个锥.

记空间 $E=C[0,1]$, 在空间 E 中定义范数 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant1}|x(t)|$, 则 E 在此范数 $\|\cdot\|$ 下成为一个 Banach 空间. 在 E 中定义一个锥 K, 并记 $K_r=\{x\in K:\|x\|\leqslant r\},\partial K_r=\{x\in K:\|x\|=r\},\overline{K}_{r,R}=\{x\in K:r\leqslant\|x\|\leqslant R\}$,其中 $0<r<R$.

引理 1[13] 设 X 是 Banach 空间, P 是 X 中的一个锥, Ω_1 和 Ω_2 是 X 中的开集, 且 $0\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2,T:P\cap\overline{\Omega}_2/\Omega_1\to P$ 是全连续算子, 如果条件 1) 若 $x\in P\cap\partial\Omega_1$, 则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$; 若 $x\in P\cap\partial\Omega_2$, 则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$;2) 若 $x\in P\cap\partial\Omega_1$, 则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$; 若 $x\in P\cap\partial\Omega_2$, 则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$ 之一满足,则算子 T 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2/\Omega_1)$中有不动点.

在 $\alpha/2+\beta+\gamma>0$ 的条件下,定义一个二元函数为

收稿日期: 2011-10-28

通信作者: 王全义(1955-),男,教授,主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail:qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

$$G(t,s)=\begin{cases}(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]\frac{t^2}{2}-\frac{(t-s)^2}{2}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ (\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]\frac{t^2}{2}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}\tag{2}$$

易见,二元函数 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续.

命题 1 对于二元函数,如果 $\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma>0,\gamma\geqslant 0,2\gamma\geqslant\alpha$ 成立,则有

$$0\leqslant t^2G(1,s)\leqslant G(t,s)\leqslant G(1,s),\qquad G_t(t,s)\geqslant 0,\quad t,s\in[0,1].\tag{3}$$

其中

$$G_t(t,s)=\begin{cases}(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]t-(t-s), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ (\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]t, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}\tag{4}$$

证明 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时,可得

$$\begin{aligned}G_t(t,s)=&(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]t-(t-s)\geqslant\\ &(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]t-(t-st)=\\ &(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[-\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\gamma]st\geqslant\\ &(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}\min\{-\frac{\alpha}{2}+\gamma,\gamma\}st\geqslant 0;\end{aligned}$$

当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时,可得

$$\begin{aligned}G_t(t,s)=&(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]t\geqslant\\ &(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}-(\frac{\alpha}{2}+\gamma)(1-s)+\gamma]t=\\ &(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[-\frac{\alpha(1-s)}{2}+\gamma]st\geqslant 0.\end{aligned}$$

故可得

$$G_t(t,s)\geqslant 0,\qquad 0\leqslant t,s\leqslant 1.$$

从而 $G(t,s)$ 关于 $t\in[0,1]$ 单调增加. 因此有

$$G(t,s)\geqslant G(0,s)=0,$$

$$\begin{aligned}G(t,s)\leqslant G(1,s)=&\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]-\frac{(1-s)^2}{2}=\\ &\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\beta(1-s)s+\gamma s(2-s)].\end{aligned}\tag{5}$$

当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时,可得

$$\begin{aligned}G(t,s)=&(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]\frac{t^2}{2}-\frac{(t-s)^2}{2}\geqslant\\ &(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma]\frac{t^2}{2}-\frac{(t-st)^2}{2}=t^2G(1,s),\end{aligned}$$

当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$,可得

$$G(t,s)=(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma)^{-1}(\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma)t^2\geqslant t^2G(1,s).$$

证毕.

注 2 当 $\beta=1,\gamma=\alpha=0$,或 $\gamma=1,\beta=\alpha=0$ 时,命题 1 强化了文献[5]中引理 2 的一些结果;当 $\alpha=0,\beta\leqslant 0,\gamma\geqslant 0$ 时,命题 1 强化了文献[9]中的引理 2.2.

引理 2 假设条件 H_1)成立. 如果 $x=x(t)$ 是积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \tag{6}$$

的正解，其中 $G(t,s)$由式(2)给出，那么 $x=x(t)$必是边值问题(1)的一个正解，而且它是非减的.

证明　在条件 H_1)下，如果 $x=x(t)$是式(6)的一个正解，那么有

$$x'(t)=\int_0^1 G_t(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\int_0^t-(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+$$
$$t\int_0^1\left(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma\right)^{-1}\left[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\beta(1-s)+\gamma\right]w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in(0,1),$$

$$x''(t)=\int_0^t-w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_0^1\left(\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma\right)^{-1}\left[\frac{\alpha(1-s)^2}{2}+\right.$$
$$\left.\beta(1-s)+\gamma\right]w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in(0,1),$$

$$x'''(t)=-w(t)f(t,x(t)),\qquad t\in(0,1),$$

且有

$$x(0)=x'(0)=\alpha x(1)+\beta x'(1)+\gamma x''(1)=0.$$

即 $x(t)$是边值问题(1)的一个正解. 由式(3)可得

$$x'(t)=\int_0^1 G_t(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant 0,$$

故 $x=x(t)$是非减的. 证毕.

为了应用引理 1，在 E 中定义一个锥 $K=\{x\in C[0,1]:x\geqslant 0,x(t)\geqslant t^2\|x\|\}$. 在条件 H_1)下，再定义算子 $T:K\to C[0,1]$为

$$(Tx)(t)=\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad x\in K. \tag{7}$$

引理 3　假设条件 H_1)成立，那么 $T(K)\subset K$，而且 $T:K\to K$ 是全连续的.

证明　由命题 1 及式(7)可得

$$(Tx)(t)=\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant t^2\int_0^1 G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=$$
$$t^2\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=t^2\|Tx\|.$$

又由式(7)可得 $Tx\in C[0,1]$. 故 $T(K)\subset K$. 下面证明 $T:K\to K$ 是全连续的.

设 Ω 是 K 中的任一有界开集. $\exists A>0$，对 $\forall x,x_n\in\Omega$，有 $\|x\|,\|x_n\|\leqslant A$. 由于 f 在$[0,1]\times[0,A]$是一致连续的且 $G(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上是一致连续的，故由条件 H_1)及 Lebesgue 控制收敛定理可知，当 $x_n\to x$ 时，有

$$(Tx_n)(t)=\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,x_n(s))\mathrm{d}s\to(Tx)(t)=\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,$$

即当 $x_n\to x$ 时，有 $Tx_n\to Tx$，因此 T 是连续算子.

由于 f 在$[0,1]\times[0,A]$连续的，故 f 在$[0,1]\times[0,A]$上有界，即存在正常数 M_1，使得

$$|f(t,x)|\leqslant M_1,\qquad (t,x)\in[0,1]\times[0,A].$$

由于 $G(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上是一致连续的，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$|t_1-t_2|<\delta$，$t_1,t_2,s\in[0,1]$时，有

$$|G(t_1,s)-G(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{M_1(1+M)}.$$

因此，由条件 H_1)可得，对于上述的 $\varepsilon\delta$，$\forall x\in\Omega$，当$|t_1-t_2|<\delta$，$t_1,t_2,s\in[0,1]$ 时，就有

$$|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|\leqslant\int_0^1|G(t_1,s)-G(t_2,s)|w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon M_1}{M_1(1+M)}\int_0^1 w(s)\mathrm{d}s<\varepsilon.$$

即函数族 $T(\Omega)$是等度连续的. 由 Ascoli-Arzela 定理可知 T 是紧算子，又 T 是连续算子，因此 T 是全连续算子.

2 主要结果

记

$$f^{\beta}=\limsup_{|p|\to\beta}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,p)}{|p|},\qquad f_{\beta}=\liminf_{|p|\to\beta}\min_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,p)}{|p|},$$

$$\int_0^1 G(1,s)w(s)\mathrm{d}s=:\nabla,\qquad \int_0^1 G(1,s)w(s)s^2\mathrm{d}s=:\Delta,$$

其中:$G(t,s)$由式(2)给出.

注 3 如果条件 H_1)成立,则由式(5)可知上述的∇,Δ必是正常数.

定理 1 假设条件 H_1)成立. 如果存在 4 个正数 $\rho_1,\rho_2,\delta,\eta$ 满足 $\rho_1\neq\rho_2,\delta<\eta\leqslant 1$, 使得

$$\nabla f(t,u)\leqslant\rho_1,\qquad t\in[0,1],\quad u\in[0,\rho_1];$$

$$\int_\delta^\eta G(1,s)w(s)\mathrm{d}s\cdot f(t,u)\geqslant\rho_2,\qquad t\in[\delta,\eta],\quad u\in[\delta^2\rho_2,\rho_2],$$

则边值问题(1)至少有一个非减的正解.

证明 考虑由式(7)定义的算子 $T:K\to C[0,1]$. 于是由引理 3 可知 $T:K\to K$ 是全连续的. 不妨设 $\rho_1<\rho_2$(同理可证 $\rho_2>\rho_2$),于是由命题 1 得, 当 $x\in\partial K_{\rho_1}$ 时, 有

$$\|Tx\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\int_0^1 G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\rho_1=\|x\|.$$

同理,当 $x\in\partial K_{\rho_2}$, $t\in[\delta,1]$时,有 $x(t)\geqslant\delta^2\rho_2$, 因此

$$\|Tx\|=\int_0^1 G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_\delta^\eta G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\rho_2=\|x\|.$$

由此可知算子 $T:K\cap(\overline{K}_{\rho_2}\setminus K_{\rho_1})\to K$ 满足引理 1 中的所有条件. 由引理 1 可知 T 有一个不动点 $x^0\in\overline{K}_{\rho_1,\rho_2}$,$\rho_1\leqslant\|x^0\|\leqslant\rho_2$, 且 $x^0(t)\geqslant t^2\|x^0\|$,$t\in[0,1]$. 再由引理 2 可知边值问题(1)有一个非减正解 x^0. 定理 1 证毕.

注 4 当 $\alpha=\beta=0,\gamma=1,w(t)=1$ 时, 通过自变量 t 换元变换可知,边值问题(1)与文献[1] 研究的边值问题是等价的. 在这种特殊情况下, 定理 1 的条件比文献[1]的定理 3.1 的条件更弱,即定理 1 推广和改进了文献[1]的定理 3.1 的结果.

定理 2 假设条件 H_1)成立,并且$\nabla f^0<1$, $\Delta f_\infty>1$ 成立, 这里 f^0,f_∞为非负常数,则边值问题(1)至少有一个非减的正解.

证明 考虑由式(7)定义的算子 $T:K\to C[0,1]$. 于是由引理 3 可知 $T:K\to K$ 是全连续的. 又因为$\nabla f^0<1$,故存在 $\varepsilon_1>0$, 使得$\nabla(f^0+\varepsilon_1)<1$. 对此 $\varepsilon_1>0$, 存在 $r_1>0$, 使得当 $t\in[0,1]$,$0<u\leqslant r_1$ 时, 就有 $f(t,u)\leqslant(f^0+\varepsilon_1)u$. 所以当 $t\in[0,1]$,$x\in\partial K_{r_1}$ 时, 由命题 1 可得

$$\|Tx\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\int_0^1 G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^1 G(1,s)w(s)(f^0+\varepsilon_1)x(s)\mathrm{d}s\leqslant\nabla(f^0+\varepsilon_1)\|x\|\leqslant\|x\|,$$

即有 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$,$x\in\partial K_{r_1}$.

因为 $\Delta f_\infty>1$,故存在 $\varepsilon_2>0$,$0<\delta<1$,使得$\int_\delta^1 G(1,s)w(s)s^2(f_\infty-\varepsilon_2)\mathrm{d}s\geqslant 1$. 对此 $\varepsilon_2>0$,存在 $r_{22}>0$,使得当 $t\in[0,1]$,$u\geqslant r_{22}$时, 有 $f(t,u)\geqslant(f_\infty-\varepsilon_2)u$. 取 $r_2=\max\{r_1+1,\delta^{-1}r_{22}\}>0$. 所以当 $x\in\partial K_{r_2}$ 时(这时有 $x(t)\geqslant\delta r_2\geqslant r_{22}$,$t\in[\delta,1]$), 由命题 1 可得

$$\|Tx\|=\int_0^1 G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_\delta^1 G(1,s)w(s)(f_\infty-\varepsilon_2)x(s)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\int_\delta^1 G(1,s)w(s)(f_\infty-\varepsilon_2)s^2\mathrm{d}s\|x\|\geqslant\|x\|.$$

由此可知算子 $T:K\cap(\overline{K}_{r_2}\setminus K_{r_1})\to K$ 满足引理 1 中的所有条件. 因此由引理 1 可知 T 有一个不动点 $x^0\in\overline{K}_{r_1,r_2}$,$r_1\leqslant\|x^0\|\leqslant r_2$, 且 $x^0(t)\geqslant t^2\|x^0\|$,$t\in[0,1]$. 再由引理 2 可知边值问题(1)有一个非减的正解 x^0. 定理 2 证毕.

注 5　当 $\beta=1,\gamma=\alpha=0$，或者 $\gamma=1,\beta=\alpha=0$ 时，边值问题(1)就分别化为文献[5]中讨论的两个边值问题，此时定理 2 的条件比文献[5]中的定理 3.2 更弱，故定理 2 推广和改进文献[5]中定理 3.2 的部分结果．当 $\alpha=0,\beta\geqslant 0,\gamma\geqslant 0$ 时，定理 2 的条件比文献[9]中的定理 3.1 更弱，故定理 2 推广和改进了文献[9]中的定理 3.1.

定理 3　假设条件 H_1)成立，并且 $\nabla f^{\infty}<1$，$\Delta f_0>1$ 成立，这里 f^{∞},f_0，为非负常数，则边值问题(1)至少有一个非减的正解.

证明　考虑由式(7)定义的算子 $T:K\to C[0,1]$．于是由引理 3 可知 $T:K\to K$ 是全连续的．又因为 $\nabla f_0<1$，故存在 $\varepsilon_3>0$，使得 $\nabla(f_0-\varepsilon_3)\geqslant 1$．对此 $\varepsilon_3>0$，存在 $r_3>0$，使得当 $t\in[0,1],0<u\leqslant r_3$ 时，就有 $f(t,u)\geqslant(f_0-\varepsilon_3)u$．所以 $x\in\partial K_{r_3}$ 时，由命题 1 可得

$$\|Tx\|=\int_0^1 G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_0^1 G(1,s)w(s)(f_0-\varepsilon_3)x(s)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\int_0^1 G(1,s)w(s)(f_0-\varepsilon_3)s^2\|x\|\mathrm{d}s\geqslant\|x\|.$$

又因为 $\nabla f^{\infty}<1$，故存在 $\varepsilon_4>0$，使 $\nabla(f^{\infty}+\varepsilon_4)<1$．对此 $\varepsilon_4>0$，存在 $r_{44}>0$，使得当 $t\in[0,1],u\geqslant r_{44}$ 时，有 $f(t,u)\leqslant(f^{\infty}+\varepsilon_4)u$. 记

$$M_1=\max\{f(t,u):0\leqslant u\leqslant r_{44},0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

则有

$$f(t,u)\leqslant(f^{\infty}+\varepsilon_4)u+M_1,\qquad t\in[0,1],\quad u\geqslant 0.$$

现在取 $r_4=\max\{r_{44},r_3+1,(\int_0^1 G(1,s)w(s)M_1\mathrm{d}s(1-\nabla(f^{\infty}+\varepsilon_4))^{-1}\}>0$．于是当 $x\in\partial K_{r_4}$ 时，由命题 1 可得

$$\|Tx\|=\int_0^1 G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(1,s)w(s)[(f_{\infty}+\varepsilon_4)x(s)+M_1]\mathrm{d}s\leqslant$$
$$(\int_0^1 G(1,s)w(s)(f_{\infty}+\varepsilon_4)\mathrm{d}s)\|x\|+\int_0^1 G(1,s)w(s)M_1\mathrm{d}s\leqslant r_4.$$

由此可知算子 $T:K\cap(\overline{K}_{r_4}\backslash K_{r_3})\to K$ 满足引理 1 中的所有条件．因此由引理 1 可知 T 有一个不动点 $x^0\in\overline{K}_{r_3,r_4}$，$r_3\leqslant\|x^0\|\leqslant r_4$，且 $x^0(t)\geqslant t^2\|x^0\|,t\in[0,1]$．再由引理 2 可知边值问题(1)有一个非减的正解．定理 3 证毕.

定理 4　假设条件 H_1)成立，并且 $\Delta f_{\infty}>1$，$\Delta f_0>1$ 成立，这里 f_0,f_{∞} 为非负常数．又存在 $b>0$，使得 $\int_0^1 G(1,s)w(s)M_2\mathrm{d}s<b$，其中 $M_2=\max\{f(t,u):t\in[0,1],u\in[0,b]\}$．那么边值问题(1)至少有两个非减正解.

证明　考虑由式(7)定义的算子 $T:K\to C[0,1]$．于是由引理 3 可知 $T:K\to K$ 是全连续的．由于 $\Delta f_{\infty}>1$，$\Delta f_0>1$，故由前面的定理 2 及定理 3 证明过程中可得，存在正常数 r_5，r_6 且 $r_5<b<r_6$，使得当 $x\in\partial K_{r_5}$ 时，有 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$；而 $x\in\partial K_{r_6}$ 时，有 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$．又当 $x\in\partial K_b$ 时，有

$$\|Tx\|\leqslant\int_0^1 G(1,s)w(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(1,s)w(s)M_2\mathrm{d}s<b=\|x\|.\tag{8}$$

由此可知算子 $T:K\cap(\overline{K}_b\backslash K_{r_5})\to K$ 及 $T:K\cap(\overline{K}_{r_6}\backslash K_b)\to K$ 满足引理 1 的所有条件．因此由引理 1 可知 T 有一个不动点 $x^0\in\overline{K}_{r_5,b}$，$r_5\leqslant\|x^0\|\leqslant b$，又有一个不动点 $x^*\in\overline{K}_{b,r_6}$，$b\leqslant\|x^*\|\leqslant r_6$．又由(8)式可知，$\|x^0\|\neq b$，$\|x^*\|\neq b$．即 T 有两个不动点，且 $x^0(t)\geqslant t^2\|x^0\|$，$x^*(t)\geqslant t^2\|x^*\|$，$t\in[0,1]$．故由引理 2 可知边值问题(1)至少有两个非减正解．定理 4 证毕.

3　例子

考虑以下三阶边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)+w(t)f(t,u(t))=0, & 0<t<1,\\ u(0)=u'(0)=\alpha u(1)+\beta u'(1)+\gamma u''(1)=0.\end{cases}\tag{9}$$

其中 $\alpha=2,\beta=-1,\gamma=1,w(t)=1/\sqrt{t}$, $f(t,u)=(\sin t+4)|\sin u|+2u$. 经计算得

$$\Delta=\int_0^1 G(1,s)w(s)s^2\,\mathrm{d}s=\frac{1}{5},\qquad \nabla=\int_0^1 G(1,s)w(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3},$$

$$f_0=6,\qquad f^{\infty}=2,\qquad \Delta f_0=\frac{6}{5}>1,\qquad \nabla f^{\infty}=\frac{2}{3}<1.$$

显然条件 H_1)成立,定理3的所有条件都被满足,故由定理3可得边值问题(9)至少有一个非减正解.

参考文献:

[1] LIU Ze-qing,DEBNATH L,KANG S M. Existence of monotone positive solutions to a third order two-point generalized right focal boundary value problem[J]. Computers and Mathematics with Applications,2008,55(3):356-367.

[2] 徐斌.非线性三阶边值问题的多解性[J].北京师范大学学报:自然科学版,2004,40(4):448-451.

[3] 孙彦.三阶奇异边值问题的正解[J].应用数学学报,2009,32(1):50-59.

[4] 冯玉强,刘三阳,姚庆六.关于三阶边值问题的解的存在性[J].应用数学学报,2003,16(3):108-111.

[5] 姚庆六.三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解[J].数学物理学报,2003,A23(1):513.

[6] 姚庆六.奇异三阶两点边值问题的相伴正解[J].山东大学学报:理学版,2010,45(12):24-27.

[7] LIU Ze-qing,UME J S,KANG S M. Positive solutions of singular third order two-point boundary value problems [J]. J Math Anal Appl,2007,326(1):589-601.

[8] GUPTA C P. On a third-order boundary value problem at resonance[J]. Diff Integral Equ,1987,2:1-12.

[9] El-SHAHED M. Positive solutions for nonlinear singular third order boundary value problem[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical and Numerical Simulation,2009,14(2):424-429.

[10] YAO Qing-liu,FENG Yu-qiang. The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem[J]. Applied Mathematics Letters,2002,15(2):227-232.

[11] LI Shu-hong. Positive solutions of nonlinear singular third order two-point boundary value problems[J]. J Math Anal Appl,2006,323(1):413-425.

[12] 曹君艳,王全义.一类二阶微分方程两点边值问题的正解存在性[J].华侨大学学报:自然科学版,2010,35(1):113-117.

[13] 郭大均.非线性范函分析[M].济南:山东科学技术出版社,2002:286-330.

Existence on Monotone Positive Solutions for Nonlinear Singular Third Order Two-Point Boundary Value Problems

ZOU Huang-hui, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we establish some new sufficient conditions for the existence of one and multiple monotone positive solutions for nonlinear singular third order two-point boundary value problems by employing the cone compression and extension fixed point theorem and some analytical skills. Our results extend and improve the relative results.

Keywords: cone; positive solutions; boundary value problem; fixed point theory

(**责任编辑:** 黄晓楠　　**英文审校:** 黄心中)