第 35 卷 第 3 期
2014 年 5 月

华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 35 No. 3
May 2014

文章编号:1000-5013(2014)03-0344-05 **doi**:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.03.0344

一类 n 阶非线性三点边值问题单调正解的存在性

王全义,邹黄辉

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类 n 阶非线性三点边值问题的单调正解的存在性.利用锥压缩锥拉伸不动点定理及分析技巧,建立该边值问题存在一个单调正解的一些充分条件.所得结果推广并改进了 ELOEPW 等的研究结果.

关键词: 锥;边值问题;单调正解;不动点定理

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

1 预备知识

微分方程的边值问题是微分方程理论及其应用的一个重要研究课题,它在热传导、等离子物理、化学工程、弹性力学等方面都有广泛的应用. 对于常微分方程的两点或多点的边值问题解的存在性,已有许多作者[1-9]研究过,并取得了一些好的成果.文献[1] 研究如下的 n 阶非线性三点边值问题

$$\left.\begin{aligned} &u^{(n)}(t)+a(t)f(u(t))=0, \qquad t\in(0,1),\\ &u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0), \qquad \alpha u(\eta)=u(1)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的正解的存在性.其中:$0<\eta<1$,$0<\alpha\eta^{n-1}<1$,$a\in C([0,1],[0,+\infty))$,$f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$.

本文研究 n 阶非线性三点边值问题,即

$$\left.\begin{aligned} &u^{(n)}(t)+f(t,u(t))=0, \qquad t<t<1,\\ &u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0), \qquad \sum_{i=0}^{n-1}a_iu^{(i)}(1)=\sum_{i=0}^{n-1}b_iu^{(i)}(\xi)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的单调正解存在性问题,其中:$\xi\in(0,1)$,$f\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$.易见,边值问题(1)是边值问题(2)的特殊情况.

假设如下条件成立:

H$_1$) $f\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$,$\gamma:=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{a_i-b_i\xi^{n-1-i}}{(n-1-i)!}>0$;

H$_2$) $\gamma^{-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{a_i(1-s)^{n-1-i}-b_i(\xi-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}-(1-s)^{n-2}\geqslant 0, s\in[0,\xi]$;$\gamma^{-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{a_i(1-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}-(1-s)^{n-2}\geqslant 0, s\in[0,1]$.

2 一些引理

记空间 $E=C[0,1]$,在空间 E 中定义范数 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$,则 E 在此范数 $\|\cdot\|$ 下成为一个 Banach空间.在 E 中定义一个锥 K,并记 $K_r=\{x\in K:\|x\|\leqslant r\}$,$\partial K_r=\{x\in K:\|x\|=r\}$,$\overline{K}_{r,R}=\{x\in K:r\leqslant\|x\|\leqslant R\}$,其中:$0<r<R$.

收稿日期: 2013-02-19

通信作者: 王全义(1955-),男,教授,主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究.E-mail:wqy19555@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金数学天元基金资助项目(11226145)

引理 1[10]　设 X 是 Banach 空间，P 是 X 中的一个锥，Ω_1 和 Ω_2 是 X 中的开集，且 $0\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T: P\cap\bar{\Omega}_2/\Omega_1\to P$ 是全连续算子，如果满足下列条件之一：

1）若 $x\in P\cap\partial\Omega_1$，则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$；若 $x\in P\cap\partial\Omega_2$，则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$；

2）若 $x\in P\cap\partial\Omega_1$，则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$；若 $x\in P\cap\partial\Omega_2$，则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$，算子 T 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$ 中有不动点.

引理 2　如果 H_1）成立，则如下定义的函数

$$G(t,s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}-b_i(\xi-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!(n-1)!}t^{n-1}-\\ \displaystyle\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & s\in[0,\min\{t,\xi\}],\quad t\in[0,1],\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}-b_i(\xi-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & s\in[t,\xi],\quad 0\leqslant t\leqslant\xi,\\ \displaystyle\gamma^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & s\in[\xi,t],\quad \xi\leqslant t\leqslant 1,\\ \displaystyle\gamma^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & s\in[\max\{t,\xi\},1],\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{3}$$

满足

$$G_t(t,x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(a_i(1-s)^{n-1-i}-b_i(\xi-s)^{n-1-i})t^{n-2}}{\gamma(n-1-i)!(n-2)!}-\\ \displaystyle\frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}, & s\in[0,\min\{t,\xi\}],\quad t\in[0,1],\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}-b_i(\xi-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}, & s\in[t,\xi],\quad 0\leqslant t\leqslant\xi,\\ \displaystyle\gamma^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}-\frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}, & s\in[\xi,t],\quad \xi\leqslant t\leqslant 1,\\ \displaystyle\gamma^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}, & s\in[\max\{t,\xi\},1],\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{4}$$

且有

$$0\leqslant t^{n-1}G(1,s)\leqslant G(t,s)\leqslant G(1,s),\qquad G_t(t,s)\geqslant 0,\qquad 0\leqslant s,\ t\leqslant 1.\tag{5}$$

引理 3　假设条件 H_1），H_2）成立，如果积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\tag{6}$$

具有一个正解 $x=x(t)\in C[0,1]$，其中 $G(t,s)$ 由式(3)给出，那么 $x=x(t)$ 必是边值问题(2)的一个正解，而且它是单调的.

证明　如果 $x=x(t)$ 是式(6)的一个正解，则

$$\begin{aligned}x(t)=&\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=-\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}f(s,x(s))\mathrm{d}s+\\&\gamma^{-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\{\int_0^1\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!}f(s,x(s))\mathrm{d}s-\\&\int_0^{\xi}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b_i(\xi-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!}f(s,x(s))\mathrm{d}s\},\end{aligned}$$

且由引理 2 得

$$x'(t)=\int_0^1 G_t(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant 0.$$

又由前式得到

$$x^{(i)}(t)=-\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}f(s,x(s))\mathrm{d}s+$$

$$\gamma^{-1}\frac{t^{n-1-i}}{(n-1-i)!}\{\int_0^1\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(1-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!}f(s,x(s))\mathrm{d}s-$$

$$\int_0^{\xi}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b_i(\xi-s)^{n-1-i}}{\gamma(n-1-i)!}f(s,x(s))\mathrm{d}s\},$$

$$x^{(n)}(t)=-f(t,x(t)),$$

$$x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{(i)}(1)-\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^{(i)}(\xi)=0.$$

这就证明了 $x(t)$是边值问题(2)的一个单调正解. 证毕.

为了应用引理1, E 中一个锥定义为

$$K=\{x\in C[0,1]:x\geqslant 0,X(t)\geqslant t^{n-1}\|x\|\}.\tag{7}$$

在条件 H_1)下,再定义算子 $T:K\to C[0,1]$为

$$(Tx)(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad x\in K.\tag{8}$$

式(8)中:$G(t,s)$由式(3)给出.

引理4 假设条件 H_1),H_2)成立,则 $T(K)\subset K$ 且 $T:K\to K$ 是全连续的.

证明 由条件 H_1)及式(8),易见当 $x\in K$ 时, $Tx\in C[0,1]$. 由引理2及式(8)得到,

$$(Tx)(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant t^{n-1}\int_0^1G(1,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=$$

$$t^{n-1}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=t^{n-1}\|Tx\|.$$

因此,当 $x\in K$ 时,$Tx\in K$,即 $T(K)\subset K$.

下面证明 $T:K\to K$ 是全连续的.

设 Ω 是 K 中的任一有界开集. $\exists A>0$, 对 $\forall x,x_n\in\Omega$, 有 $\|x\|,\|x_n\|\leqslant A$. 由于 f 在$[0,1]\times[0,A]$是一致连续的且$G(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上是一致连续的, 故由条件 H_1)及 Lebesgue 控制收敛定理可知, 当 $x_n\to x$ 时, 有

$$(Tx_n)(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,x_n(s))\mathrm{d}s\to(Tx)(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,$$

即当 $x_n\to x$ 时, 有 $Tx_n\to Tx$, 因此,T 是连续算子.

由于 f 在$[0,1]\times[0,A]$连续的, 故 f 在$[0,1]\times[0,A]$上有界,即存在正常数 M_1,使得

$$|f(t,x)|\leqslant M_1,\qquad(t,x)\in[0,1]\times[0,A].$$

由于 $G(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上是一致连续的, 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $|t_1-t_2|<\delta,t_1,t_2,s\in[0,1]$时,有

$$|G(t_1,s)-G(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{M_1(1+M)}.$$

因此,由条件 H_1)可得, 对于上述的 ε,δ, $\forall x\in\Omega$,当$|t_1-t_2|<\delta,t_1,t_2\in[0,1]$时, 就有

$$|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|\leqslant\int_0^1|G(t_1,s)-G(t_2,s)|f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{\varepsilon M_1}{M_1(1+M)}<\varepsilon,$$

即函数族 $T(\Omega)$是等度连续的.

由 Ascoli-Arzela 定理可知 T 是紧算子, 又 T 是连续算子, 因此,T 是全连续算子. 证毕.

3 主要结果

先假设如下条件:

A_1) 存在$[0,1]$上的非负连续函数 $b_1(t)$,使得极限$\limsup\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(t,x)}{x}=b_1(t)$对 $t\in[0,1]$一致地存在;

A_2) 存在$[0,1]$上的非负连续函数 $b_2(t)$,使得极限$\liminf\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(t,x)}{x}=b_2(t)$对 $t\in[0,1]$一致地存在;

A_3）存在[0,1]上的非负连续函数 $b_3(t)$，使得极限 $\limsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(t,x)}{x}=b_3(t)$ 对 $t\in[0,1]$ 一致地存在；

A_4）存在[0,1]上的非负连续函数 $b_4(t)$，使得极限 $\liminf\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(t,x)}{x}=b_4(t)$ 对 $t\in[0,1]$ 一致地存在；

A_5）$\int_0^1 G(1,s)b_1(s)\mathrm{d}s<1$，$\int_0^1 G(1,s)s^{n-1}b_2(s)\mathrm{d}s>1$，其中 $G(t,x)$ 由式(3)给出；

A_6）$\int_0^1 G(1,s)b_3(s)\mathrm{d}s<1$，$\int_0^1 G(1,s)s^{n-1}b_4(s)\mathrm{d}s>1$，其中 $G(t,x)$ 由式(3)给出；

A_7）存在正数 b_1,b_2 使得 $\limsup\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=b_1$ 及 $\liminf\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=b_2$，且 $b_1\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s<1$，$b_2\int_0^1 G(1,s)s^{n-1}\mathrm{d}s>1$，其中 $G(t,x)$ 由式(3)给出；

A_8）存在正数 b_3,b_4 使得 $\limsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=b_3$ 及 $\liminf\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=b_4$，且 $b_3\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s<1$，$b_4\int_0^1 G(1,s)s^{n-1}\mathrm{d}s>1$，其中 $G(t,x)$ 由式(3)给出.

定理 1　假设条件 H_1）～H_2），A_1）～A_2）和 A_5）成立，则边值问题(2)至少有一个单调正解.

证明　考虑由式(8)定义的算子 $T:K\to C[0,1]$，由引理 4 可知 $T:K\to K$ 是全连续的. 因为 $\int_0^1 G(1,s)b_1(s)\mathrm{d}s<1$，故存在 $\varepsilon_1>0$ 使得 $\int_0^1 G(1,s)[b_1(s)+\varepsilon_1]\mathrm{d}s<1$. 由条件 A_1），对于上述的 $\varepsilon_1>0$ 存在 $r_1>0$，使得

$$f(t,u)\leqslant(b_1(t)+\varepsilon)u,\qquad t\in[0,1],\quad 0<u\leqslant r_1.\tag{9}$$

由式(5)，(8)，(9)得，当 $x\in\partial K_{r_1}$，$t\in[0,1]$ 时，有

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\max_{0\leqslant t\leqslant1}\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\int_0^1 G(1,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\\&\int_0^1 G(1,s)(b_1(s)+\varepsilon_1)x(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(1,s)(b_1(s)+\varepsilon_1)\mathrm{d}s\|x\|\leqslant\|x\|.\end{aligned}$$

因此，有

$$\|Tx\|\leqslant\|x\|,\qquad x\in\partial K_{r_1}.\tag{10}$$

又因为 $\int_0^1 G(1,s)s^{n-1}b_2(s)\mathrm{d}s>1$，故存在 $0<\delta<1/2$，使得

$$\int_0^1 G(1,s)s^{n-1}b_2(s)\mathrm{d}s>1.$$

再取 $\varepsilon_2>0$ 充分小，使得

$$\int_\delta^1 G(1,s)s^{n-1}b_2(s)\mathrm{d}s-\varepsilon_2\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s>1.\tag{11}$$

由条件 A_2），对于上述的 $\varepsilon_2>0$，存在 $r_{22}>0$，使得

$$f(t,u)\geqslant(b_2(t)-\varepsilon_2)u,\qquad t\in[0,1],\quad u\geqslant r_{22}.\tag{12}$$

令 $r_2=\max\{r_1+1,\delta^{-1}r_{22}\}$，则对于任意的 $x\in\partial K_{r_2}$，有

$$x(t)\geqslant t^{n-1}\|x\|\geqslant\delta\cdot r_2\geqslant r_{22},\qquad t\in[\delta,1].\tag{13}$$

因此，对于任意的 $x\in\partial K_{r_2}$，由式(8)，式(11)～(13)可得

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\int_0^1 G(1,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_\delta^1 G(1,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\int_\delta^1 G(1,s)(b_2(t)-\varepsilon_2)x(s)\mathrm{d}s=\int_\delta^1 G(1,s)b_2(t)x(s)\mathrm{d}s-\int_\delta^1 G(1,s)\varepsilon_2x(s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\int_\delta^1 G(1,s)b_2(t)s^{n-1}\mathrm{d}s\|x\|-\varepsilon_2\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s\|x\|\geqslant\|x\|.\end{aligned}\tag{14}$$

由式(10)，(14)可知：算子 $T:K\cap(\bar{k}_{r_2}/K_{r_1})\to K$ 满足引理 1 中的所有条件. 因此，由引理 1 可知：T 有一个不动点 $x^0\in\bar{k}_{r_1,r_2}$ 满足 $r_2\leqslant\|x^0\|\leqslant r_2$. 由式(8)及引理 3 可知：边值问题(2)至少有一个单调正解 x^0 满足 $x^0(t)\geqslant t^{n-1}\|x^0\|$，$t\in[0,1]$. 证毕.

定理 2　假设条件 H_1）～H_2），A_3～A_4）和 A_6）成立，则边值问题(2)至少有一个单调正解.

定理2的证明与定理1的证明完全类似,故此处从略.

对于边值问题(1),这时条件 H_1)～H_2)自然成立,因此,由定理1及定理2得到如下推论:

推论1 假设条件 A_7)成立,则边值问题(1)至少有一个单调正解.

推论2 假设条件 A_8)成立,则边值问题(1)至少有一个单调正解.

注1 显然,推论1及推论2的条件大大地弱于文献[1]中的主要结果中定理2.4的条件,因此,文中的结果推广和改进了文献[1]中的主要结果.

参考文献:

[1] ELOE P W,AHMAD B. Positive solutions of a nonlinear nth order boundary value problem with nonlocal conditions[J]. Appl Math Lett,2005,18(5):521-527.

[2] LIU Bing. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem[J]. Comput Math Appl,2002,44(1/2):201-211.

[3] ZHAO Jun-fang,GE Wei-gao. A necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions to a kind of singular three-point boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis,2009,71(9):3973-3980.

[4] KWONG M K,WONG J S W. Solvability of second-order nonlinear three-point boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis,2010,73(8):2342-2352.

[5] GUPTA C P. Solvability of three-point nonlinear boundary value problems for a second ordinary differential equation[J]. J Math Anal Appl,1992,168(2): 540-551.

[6] SUN Yong-ping. Positive solutions of singular third-order three-point boundary value problems[J]. J Math Anal Appl,2005,306(2):589-603.

[7] ZHANG Xue-mei, FENG Mei-qiang,GE Wei-gao. Multiple positive solutions for a class of m-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics Letters,2009,22(1):12-18.

[8] FENG Mei-qiang, GE Wei-gao. Existence results for a class of *n*th order *m*-point boundary value problems in banach spaces[J]. Applied Mathematics Letters,2009,22(12):1303-1308.

[9] 邹黄辉,王全义.非线性奇异三阶两点边值问题单调正解的存在性[J].华侨大学学报:自然科学版,2012,33(6):699-704.

[10] 郭大钧.非线性泛函分析[M].济南:山东科学技术出版社,2002:286-330.

Monotone Positive Solutions for A Class of *n*th Order Nonlinear Three-Point Boundary Value Problems

WANG Quan-yi, ZOU Huang-hui

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study the existence on monotone positive solutions for a class of *n*th order nonlinear three-point boundary value problems. By employing the cone compression and extension fixed point theorem and some analytical skills, we establish some sufficient conditions which guarantee the existence of one monotone positive solution for the boundary value problems. Our results extend and improve some results made by ELOEPW etc.

Keywords: cone order; boundary value problem; monotone positive solution; fixed-point theorem

(**责任编辑**:陈志贤 **英文审校**:黄心中)