

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201704018



# 产 生 长 距 离 Mathieu 光 束 的 方 法

冯 聪<sup>1,2</sup>, 张 鹭<sup>1,2</sup>, 吴 逢 铁<sup>1,2</sup>, 王 硕 琛<sup>1,2</sup>

(1. 华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021;

2. 华侨大学 福建省光传输与变换重点实验室, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 设计一套提高 Mathieu 光束无衍射距离的光学系统, 并进行数值模拟. 根据传统的方法, 利用轴棱锥聚焦椭圆高斯振幅调制的平面波产生 Mathieu 光束; 同时, 基于凹透镜对光束的发散特性, 将其放置在轴棱锥的前方, 使 Mathieu 光束的无衍射距离得到提高. 使用 Mathcad 软件进行模拟, 并将新系统与传统方法对比. 结果表明: 利用凹透镜系统, 可以得到无衍射距离大、质量较高的 Mathieu 光束.

**关键词:** Mathieu 光束; 凹透镜; 光学系统; 光路优化

中图分类号: O 436.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2017)04-0541-05

## Method of Obtaining Long-Distance Mathieu Beam

FENG Cong<sup>1,2</sup>, ZHANG Jiu<sup>1,2</sup>,  
WU Fengtie<sup>1,2</sup>, WANG Shuochen<sup>1,2</sup>

(1. College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;

2. Fujian Key Laboratory of Optical Beam Transmission and Transformation, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** We have designed and simulated an optical system to increase non-diffracting distance of Mathieu beam. According to the traditional method, we focused a plane wave modulated by elliptical Gaussian amplitude to get the Mathieu beam. And based on the divergence characteristics to the beam by using the concave lens, the concave lens was placed in front of the axicon to increase the non-diffracting distance of Mathieu beam. The simulation was carried out by using software Mathcad, the new system and the traditional method was compared. Results show that the Mathieu beam with longer distance and higher quality can be obtained by the new system.

**Keywords:** Mathieu beam; concave lens; optical system; optical path optimization

无衍射光束的概念是由 Durnin 等<sup>[1]</sup>在 1987 年首次提出, 这是一种在自由空间传播过程中横向光场分布不随传播距离发生变化且光场能量集中的光束. 由于光束具有无衍射和自重建的特性成为国内外学者研究的热点<sup>[2-3]</sup>, 被广泛应用于激光成像<sup>[4]</sup>、光学微操作<sup>[5]</sup>和安全质量检测<sup>[6]</sup>等领域. 事实上, Durnin 提出的无衍射 Bessel 光束只是无衍射光束家族中的一员<sup>[7]</sup>, 是自由空间波动方程在圆柱坐标下的一组特解. 2005 年, Gutierrezvega 等<sup>[8]</sup>提出自由空间的标量波动方程能在直角坐标系、圆柱坐标系、椭圆坐标系和抛物线坐标系 4 组坐标系下进行分离变量求得无衍射解, 分别对应 Cosine 光束、Bessel 光束、Mathieu 光束和 Parabolic 光束. 目前, 对 Bessel 光束的研究较多, 而对 Mathieu 光束等研究较少.

收稿日期: 2017-01-04

通信作者: 吴逢铁(1958-), 男, 教授, 博士, 主要从事光束传输与变换、短脉冲技术及非线性光学的研究. E-mail: fengtie@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61178015); 国家自然科学基金青年基金资助项目(61605049); 福建省科技重大项目(2016H6016)

2014 年,李冬等<sup>[9]</sup>提出一种基于轴棱锥产生零阶无衍射 Mathieu 光束的新方法,并研究了 Mathieu 光束的自重建特性<sup>[10]</sup>.越来越多的研究证明,Mathieu 光束可以被用于光学微操作和光通信等领域<sup>[11-12]</sup>.随着不断研究,产生 Mathieu 光束的方法也越来越多.例如,计算机相位全息法<sup>[13]</sup>、环缝透镜组方法<sup>[14]</sup>和柱透镜-轴棱锥法<sup>[9]</sup>.其中,相位全息法操作繁琐,成本高;环缝透镜法光能利用率低;而柱透镜-轴棱锥法不仅方便简单,成本低,且光能利用率高.无衍射光束的无衍射距离往往由轴棱锥的底角大小所限制,在超过无衍射距离后,光束就失去了中心不发散的特性,所以提高 Mathieu 光束的无衍射距离在实际应用中显得非常重要.减小轴棱锥底角的大小增加了光学元件的加工难度并提高了成本,限制了 Mathieu 光束的实际应用.因此,通过优化光路提高无衍射距离便尤为重要.文中根据凹透镜对光束的发散特性,将凹透镜加入柱透镜-轴棱锥系统中,设计一套新的光学系统,用 Mathcad 模拟仿真,并利用实验进行验证.

## 1 Mathieu 光束理论分析

自由空间中的标量波动方程可以表示为

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0.$$

用 Whittaker 解<sup>[15]</sup>可以表示为

$$U(x,y,z) = \frac{\exp(ik_z z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\varphi) \times \exp[ik_t(x\cos\varphi + y\sin\varphi)]d\varphi. \tag{1}$$

式(1)中: $k_t$  是平面波的径向波矢分量, $k_t = k\sin\theta$ ;  $k_z$  是轴向波矢分离, $k_z = k\cos\theta$ ,  $\theta$  是波矢与  $z$  轴的夹角,波数  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $A(\varphi)$  是理想无衍射光的复角谱分布.

由式(1)可知:当  $A(\varphi)$  取不同的值时,可以得到不同的衍射光场.在椭圆坐标系中,当  $A(\varphi)$  取零阶角 Mathieu 分布  $ce_0(\varphi;q)$  时,对式(1)积分后,获得零阶 Mathieu 光分布为

$$U(\xi,\eta,z,t;q) = J_{\theta_0}(\xi;q)c\theta_0(\eta;q)\exp(ik_z z - i\omega t). \tag{2}$$

式(2)中: $\xi \in [0,\infty]$ ,  $\eta \in [0,2\pi]$  为径向变量和角向变量,与直角坐标系关系为  $x = h(\cos h)\xi(\sin \eta)$ ,  $y = h(\sin h)\xi(\sin \eta)$ ,  $z = z$ ,  $2h$  为椭圆柱坐标中椭圆两个焦点之间的距离; $J_{\theta_0}(\xi;q)$  代表第一类零阶径向 Mathieu 函数,  $q = h^2 k_t^2/4$ .

采用柱透镜调制高斯光束得到椭圆高斯振幅调制的平面波,将其近似为零阶角 Mathieu 函数振幅调制的平面波,从而获得 Mathieu 光束.实验原理图,如图 1 所示.

椭圆高斯振幅调制的平面波可以表示为

$$E(x,y,0) = \exp(-\frac{x^2}{\omega_{0,x}^2} - \frac{y^2}{\omega_{0,y}^2}). \tag{3}$$

让椭圆高斯振幅调制的平面波入射到轴棱锥上,根据菲涅尔衍射积分理论,轴棱锥后的无衍射光场分布可以表示为

$$U(r,\theta,z) = \frac{\exp(ik_z z)}{i\lambda z} \exp(\frac{ikr^2}{2z}) \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp(-\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{\omega_{0,x}^2} - \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{\omega_{0,y}^2}) \times \exp(-ik(n-1)\gamma\rho) \exp[\frac{ik}{2z}(\rho^2 + 2\rho r \cos(\varphi - \theta))] \rho d\rho d\varphi. \tag{4}$$

式(4)中: $n$  为轴棱锥的折射率; $\gamma$  是轴棱锥的底角; $R$  为孔径光阑半径.

## 2 无衍射距离计算与光路设计

Mathieu 光束的形成是通过轴棱锥聚焦椭圆高斯振幅调制的平面波,与 Bessel 光束的唯一区别是入射到轴棱锥上的平面波具有不同的振幅调制模式,故计算 Mathieu 光束的最大无衍射距离与计算 Bessel 光束的无衍射距离的几何模型一致.计算无衍射距离的几何模型,如图 2 所示.图 2 中:带有椭圆高斯振幅调制的平面波入射到轴棱锥上,经轴棱锥聚焦会在后方形形成无衍射光束,菱形  $ABCD$  便代表

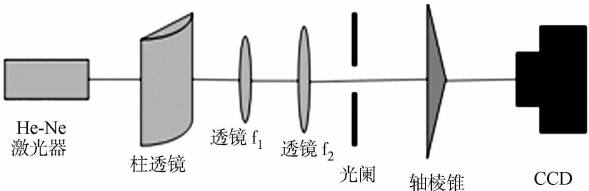


图 1 产生 Mathieu 光束的实验原理图

Fig. 1 Experimental schematic for obtaining Mathieu beam

无衍射 Mathieu 光束产生区域. 由几何光学可知, 最大无衍射距离  $AD$  的大小为  $Z_{\max}=R/((n-1)\gamma)$ . 当  $R$  为 2 mm, 折射率为 1.47; 当  $\gamma$  为  $1^\circ$  时,  $Z_{\max}=243$  mm.

由此可知, 最大无衍射距离与光斑半径  $R$  成正比, 与轴棱锥底角  $\gamma$  成反比, 与透镜折射率成反比. 对于给定的轴棱锥, 底角  $\gamma$  和折射率  $n$  即给定, 光斑半径  $R$  越大, 最大无衍射距离  $Z_{\max}$  也越大. 根据凹透镜对平面波的扩散作用, 加入平凹透镜, 当平面波照射在凹透镜上, 得到发散的球面波, 轴棱锥聚焦的光束的光斑半径也将扩大, 通过这种方式提高无衍射距离.

当球面波经过轴棱锥聚焦后, 无衍射距离变为  $Z_2^{[16]}$ , 即

$$Z_2 = \frac{R_2 \times z_0}{(n-1)\gamma z_0 - R_2}.$$

式(5)中:  $R_2$  为入射到平凹透镜后形成球面波的半径;  $z_0$  为球面波到轴棱锥的距离.

根据几何光学可知, 平凹透镜曲率半径为  $r$ , 厚度为  $d$ , 折射率为  $n$ , 则像方焦距为

$$f = \frac{-r}{n-1}.$$

当平凹透镜与轴棱锥相距 50 mm 时, 曲率半径  $r=200$  mm,  $R_2=2.47$  mm,  $z_0=475.5$  mm, 带入式(5), 可得  $Z_2=638$  mm.

### 3 模拟及实验验证

为了验证加入凹透镜的新系统对最大无衍射距离的影响, 并与原本柱透镜轴棱锥系统(图 1)相比, 设计出新的 Mathieu 光束产生光路. 在原系统的基础上加入平凹透镜, 将平凹透镜置于光阑与轴棱锥之间, 使平凹透镜与轴棱锥距离为 50 mm. 凹透镜系统, 如图 3 所示.

利用 Mathcad 软件对新系统和原系统分别进行光强分布模拟, 参数如下: He-Ne 激光器波长为 632.8 nm; 柱透镜焦距为 135 mm; 扩束准直系统中的透镜  $f_1$  焦距为 15 mm; 透镜  $f_2$  焦距为 190 mm; 光阑半径为 2 mm; 凹透镜和轴棱锥折射率都为 1.47; 平凹透镜的曲率半径为 200 mm; 轴棱锥底角为  $1^\circ$ .

从光线传播的角度来看, 柱透镜是非对称光学元件. 当光路中存在柱透镜时, 该系统为非轴对称光学系统, 可用  $4\times 4$  变换矩阵描述非轴对称光学系统<sup>[17]</sup>, 在近轴近似条件下, 空间域中的广义惠更斯-菲涅尔衍射积分为

$$U_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{|j\mathbf{B}|^{-1/2}}{\lambda}\right)\exp(jkz)\iint_{s_1} U_1(x_1, y_1, 0) \exp\left\{\frac{ik}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & -\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{C}-\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right\} dx_1 dy_1.$$

式(7)中:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  均为  $2\times 2$  矩阵. 已知透镜、轴棱锥和自由空间的  $ABCD$  矩阵分别为  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . 其中,  $r$  为轴棱锥半径,  $r=17$  mm.

对传统柱透镜-轴棱锥系统进行模拟, 结果如图 4 所示. 按照图 3 所示设计光路, 将凹透镜加在轴棱锥之前, 使凹透镜与轴棱锥距离 50 mm. 对这个新系统进行模拟, 结果如图 5 所示.

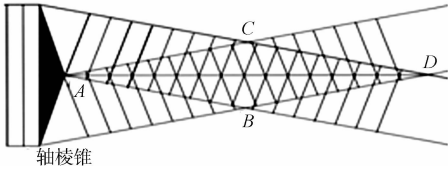


图 2 计算无衍射距离的几何模型

Fig. 2 Geometrical model for calculating non-diffracting distanced

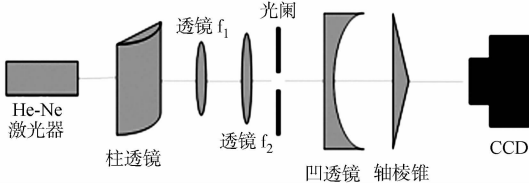


图 3 产生长距离 Mathieu 光束的凹透镜系统

Fig. 3 Concave lens system for generating long-distance Mathieu beams

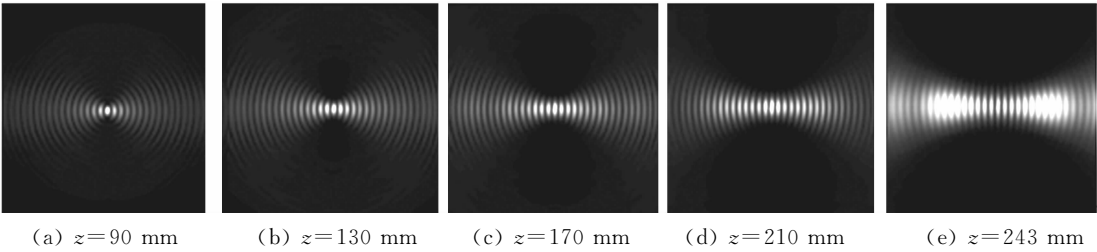


图 4 传统系统获得不同位置的模拟光场分布

Fig. 4 Light field distributions at different locations simulated by traditional systems

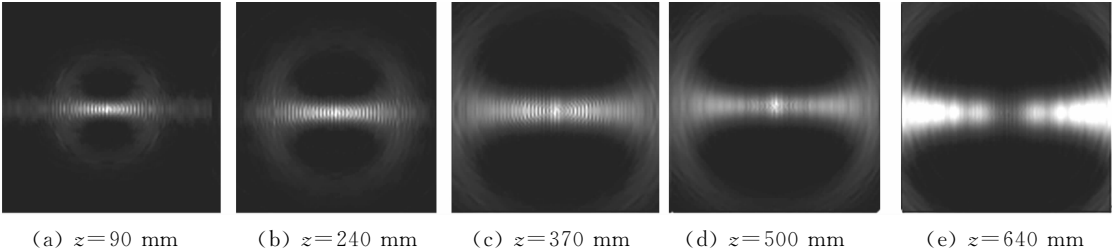


图 5 新系统获得不同位置的模拟光场分布

Fig. 5 Light field distributions at different locations simulated by new systems

由图 5 可知:Mathieu 光束在观察面的光强分布呈带状分布,在横向方面呈周期性分布,且中心光强比较高,在纵向分布较为集中,整体类似一个  $x$  型;加入凹透镜后的新系统在原本最大无衍射距离 243 mm 处并没有发散,无衍射特性明显,证明了凹透镜能够提高无衍射距离;最终发现在 640 mm 处, Mathieu 光束的无衍射特性丢失,与式(5)所得结果近似.

根据图 1,3 设计光路,对上述模拟进行实验验证. 同样的,使用 He-Ne 激光器波长为 632.8 nm,柱透镜焦距为 135 mm,扩束准直系统中的透镜  $f_1$  焦距为 15 mm,透镜  $f_2$  焦距为 190 mm,光阑半径为 2 mm,凹透镜和轴棱锥折射率均为 1.47,平凹透镜的曲率半径为 200 mm,轴棱锥底角为  $1^\circ$ . 利用电荷耦合元件(CCD)记录在轴棱锥后不同距离处光强分布图,如图 6 所示. 由图 6 可知:随着距离增加,衍射光场过渡到 Mathieu 光束光场分布;在距离 243 mm 时,光束丢失了无衍射特性. 因此,可以认为 Mathieu 光束的无衍射距离为 243 mm,与模拟结果近似.

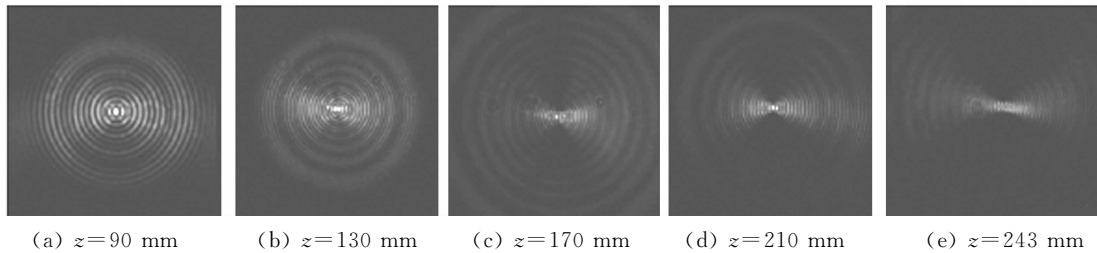


图 6 传统系统产生的 Mathieu 光束

Fig. 6 Mathieu beam at different locations by traditional systems

加入轴棱锥后产生的 Mathieu 光束,如图 7 所示. 由图 7 可知:在距离为 640 mm 处,Mathieu 光束已近乎消失,所以认为新系统产生 Mathieu 光束的无衍射距离为 640 mm. 进而证明,加入凹透镜可使

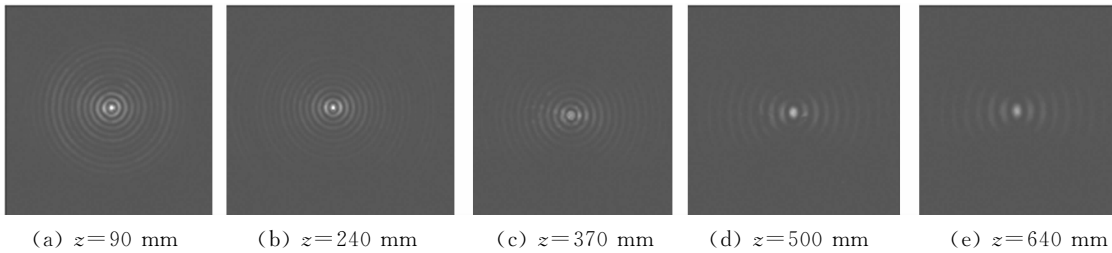


图 7 加入轴棱锥后新系统产生的 Mathieu 光束

Fig. 7 Mathieu beam at different locations by new systems

无衍射光束的质量更好,传播距离更远.

## 4 结束语

在前人设计的柱透镜-轴棱锥系统产生 Mathieu 光束的基础上,结合凹透镜的几何光学性质,设计模拟并通过实验验证了一套可以提高 Mathieu 光束衍射距离的光学系统. 经过巧妙的改动,对 Mathieu 光束的传输质量有显著的提高,且光路简单,凹透镜成本低廉,方便获取. 此外,还可以根据不同的需求设置参数,采用不同的凹透镜,获得不同性质的 Mathieu 光束. 相对于其他提高 Mathieu 光束的方法,该系统简单高效,在实际生活中也具有极高的应用前景.

## 参考文献:

[1] DURNIN J, MICELI J J, EBERLY J H. Diffraction-free beams[J]. *Physical Review Letters*, 1987, 58(15): 1499-1501.

[2] FAHRBACH F O, ROHRBACH A. Propagation stability of self-reconstructing Bessel beams enables contrast-enhanced imaging in thick media[J]. *Nature Communications*, 2012, 3(6): 632-639.

[3] 张前安, 吴逢铁, 郑维涛, 等. 高阶贝塞尔-高斯光束的自重建特性[J]. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2011, 41(10): 1131-1137.

[4] PLANCHON T A, GAO L, MILKIE D E, *et al.* Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination[J]. *Nature Methods*, 2011, 8(5): 417-423.

[5] AYALA Y A, ARZOLA A V, VOLKESEPULVEDA K. 3D micromanipulation at low numerical aperture with a single light beam: The focused-Bessel trap[J]. *Optics Letters*, 2016, 41(3): 614-617.

[6] MURUKESHAN V M, HONG X J J, SHINOJ V K, *et al.* Non-contact high resolution Bessel beam probe for diagnostic imaging of cornea and trabecular meshwork region in eye[C]// *European Conferences on Biomedical Optics*. Munich: [s. n.], 2015: 953728(1-5).

[7] 王硕琛, 梅小华, 谢晓霞, 等. 无衍射光束簇[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2016, 37(2): 149-154.

[8] GUTIERREZVEGA J C, BANDRES M A. Helmholtz-Gauss waves[J]. *Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science and Vision*, 2005, 22(2): 289-298.

[9] 李冬, 吴逢铁, 谢晓霞. 基于轴棱锥产生近似无衍射 Mathieu 光束的新方法[J]. *物理学报*, 2014, 63(15): 152401-152407.

[10] 李冬, 吴逢铁, 谢晓霞, 等. 无衍射 Mathieu 光束自重建特性的理论和实验研究[J]. *物理学报*, 2015, 64(1): 82-87.

[11] CHAFIQ A, NEBDI H, BELAFHAL A. Beam shape coefficients and scattering of zeroth order mathieu beam by homogeneous sphere[J]. *Physical and Chemical News*, 2014, 74(7): 1-9.

[12] ALPMANN C, BOWMAN R, WOERDEMANN M, *et al.* Mathieu beams as versatile light moulds for 3D micro particle assemblies[J]. *Optics Express*, 2010, 18(25): 26084-26091.

[13] CHÁVEZCERDA S, PADGETT M J, ALLISON I, *et al.* Holographic generation and orbital angular momentum of high-order Mathieu beams[J]. *Journal of Optics B Quantum and Semiclassical Optics*, 2002, 4(2): S52-S57.

[14] GUTIERREZVEGA J C, ITURBE-CASTILLO M D, RAMÍREZ G A, *et al.* Experimental demonstration of optical Mathieu beams[J]. *Optics Communications*, 2001, 195(1/2/3/4): 35-40.

[15] EZ-ZARIY L, NEBDI H, CHAFIQ A, *et al.* Mathieu-Gauss beam and its propagation[J]. *Physical and Chemical News*, 2012(64): 42-52.

[16] 翟中生, 赵斌. 无衍射光束中心光斑的特性研究[J]. *激光技术*, 2008, 32(5): 480-483.

[17] 吕百达. 激光光学: 光束描述、传输变换与光腔技术物理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 16-18.

(责任编辑: 钱筠      英文审校: 吴逢铁)