第 38 卷 第 5 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 5
2017 年 9 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Sep. 2017

doi:10.11830/ISSN.1000-5013.201609021

# Bloch 型双调和映照

李西振，陈行堤

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

**摘要**： 研究 Bloch 型双调和函数的判别准则和系数估计.通过建立双调和函数的线性和复合性质，得到双调和函数的 Bloch 型判别法则.利用双调和的表示理论及调和函数的 Pre-Schwarz 导数估计，给出 Bloch 型双调和函数的单叶性判定定理及系数估计.

**关键词**： Bloch 函数；双调和映照；系数估计；拟正则映照

**中图分类号**： O 174.55 **文献标志码**： A **文章编号**： 1000-5013(2017)05-0737-05

# On Biharmonic Bloch-Type Mappings

LI Xizhen, CHEN Xingdi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract**: This paper studies the criterion and coefficient estimate of Bloch-type biharmonic mappings. After establishing the linear and composite properties of biharmonic mappings, we give a criterion for biharmonic mappings to be Bloch-type. Combining the representation theorem of the biharmonic mappings with the estimation of Pre-Schwarz derivative of harmonic mappings, we obtain a univalent criterion and some coefficient estimates of biharmonic mappings for Bloch-type biharmonic mappings.

**Keywords**: Bloch function; biharmonic mapping; coefficient estimate; quasiregular mapping

## 1 预备知识

假设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为单位圆盘 $D$ 上具有二阶连续偏导数的函数，若它的雅可比 $J_f$ 满足 $J_f(z)=|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2>0$，则称 $f$ 是保向的；反之，则称 $f$ 是反向的.如果一个 $C^2$ 函数 $f$ 满足 Laplace 方程 $\Delta f(z)=f_{x,x}+f_{y,y}=4f_{z,\bar{z}}=0$，则称 $f$ 为一个调和函数，它可表示为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中，函数 $h(z)$ 和 $g(z)$ 是 $D$ 上的两个解析函数.Lewy[1] 证明了单连通区域上的调和函数 $f(z)$ 是局部单叶的当且仅当 $J_f(z)\neq 0$.更多调和映照性质的获取可参考文献[2-5].

如果映照 $f$ 在 $D$ 上满足 $\Delta\Delta f=0$，那么称 $f$ 为 $D$ 上的双调和映照，每个双调和映照具有的表达式为 $f(z)=|z|^2h(z)+g(z)$，其中，函数 $h(z)=h_1(z)+\overline{h_2(z)}$，$g(z)=g_1(z)+\overline{g_2(z)}$，$h_i(i=1,2)$，$g_i(i=1,2)$ 都是 $D$ 上的解析函数[6].

设 $f$ 为单位圆盘 $D$ 到自身上的保向映照，若它满足 $f\in \mathrm{ACL}^2(D)$，且不等式 $|\nabla f(z)|^2\leqslant KJ_f(z)$ 在 $D$ 上几乎处处成立，则称 $f$ 为 $D$ 上的 $K$-拟正则映照，其中，$|\nabla f|=|f_z|+|f_{\bar{z}}|$.

如果一个 $C^2$ 函数 $f$ 满足

**收稿日期**： 2016-09-15

**通信作者**： 陈行堤(1976-)，男，教授，博士，主要从事函数论的研究.E-mail:chxtt@hqu.edu.cn.

**基金项目**： 国家自然科学基金资助项目(11471128)；福建省自然科学基金计划资助项目(2014J01013)；华侨大学青年教师科研提升资助计划(ZQN-YX110)；华侨大学研究生科研创新能力培育计划资助项目(1511313003)

$$\beta(f)=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\sqrt{|J_f(z)|^2}<\infty,$$

则称为 Bloch 型函数,记这类函数全体为 $B$. 如果 $f$ 为 $D$ 上的解析函数时,记这类函数全体为 $B_A$. 如果 $f$ 为 $D$ 上的调和函数时,记这类函数全体为 $B_H$. 如果 $f$ 为 $D$ 上的双调和函数时,记这类函数全体为 $B_{\mathrm{BH}}$,则 $B_A\subseteq B_H\subseteq B_{\mathrm{BH}}\subseteq B$. 文献[7-13]对类 Bloch 型函数 $B_A$,$B_H$ 开展了研究,其中,文献[10]证明了定理 A,B.

**定理 A** 假设 $F=H+\overline{G}$ 在 $D$ 上单叶且保向,如果 $h=\log(H')$ 且 $\omega:D\to D$ 是任一解析函数,那么具有第 2 复特征 $\omega_f=\omega$ 的调和函数 $f=h+\overline{g}$ 属于 $B_H$.

**定理 B** 假设 $f=h+\overline{g}\in B_H$ 是保向的,且 $g\in B_A$. 设 $0<\varepsilon<1$,则

$$H(z)=\int_0^z\exp\left(\frac{\varepsilon}{c}h(\zeta)\right)\mathrm{d}\zeta.$$

上式中:$c=\sqrt{\beta(f)^2+\beta(g)^2}$. 如果 $\omega:D\to D$ 是解析的,且满足 $\|\omega\|_h\leqslant\frac{1-\varepsilon}{2}$,那么具有第 2 复特征 $\omega_F=\omega$ 的调和映照 $F=H+\overline{G}$ 是单叶的.

本文主要研究具有表达式 $f=|z|^2h$ 的双调和映照类. 同时,给出该类双调和 Bloch 型函数的系数估计.

## 2 主要结论及证明

**性质 1** 如果 $f=|z|^2h\in B_{\mathrm{BH}}$,$\varphi_\alpha(z)=\frac{\alpha+z}{1+\overline{\alpha}z}$为定义在 $D$ 上到自身的同构映射,则

1) $af+b\overline{f}\in B_{\mathrm{BH}}$,

2) $f\circ\varphi_\alpha\in B_{\mathrm{BH}}$.

证明 1) 由假设知,存在两个解析函数 $h_1$,$h_2$ 满足

$$f=|z|^2h=|z|^2(h_1+\overline{h}_2),$$

从而有

$$f_z=\overline{z}h+|z|^2h'_1,\qquad f_{\overline{z}}=zh+|z|^2\overline{h}'_2.$$

令 $F=af+b\overline{f}=|z|^2(ah+b\overline{h})$,则有

$$F_z=(a\overline{z}h+b\overline{zh})+a|z|^2h'_1+b|z|^2h'_2=a(\overline{z}h+|z|^2h'_1)+b(\overline{zh}+|z|^2h'_2)=af_z+b\overline{f}_z.$$

同理可得

$$F_{\overline{z}}=af_{\overline{z}}+b\overline{f}_{\overline{z}}.$$

因此,有

$$\begin{aligned}J_f(z)=&|F_z|^2-|F_{\overline{z}}|^2=|af_z+b\overline{f}_z|^2-|af_{\overline{z}}+b\overline{f}_{\overline{z}}|^2=(af_z+b\overline{f}_z)\overline{(af_z+b\overline{f}_z)}-\\&(af_{\overline{z}}+b\overline{f}_{\overline{z}})\overline{(af_{\overline{z}}+b\overline{f}_{\overline{z}})}=|a|^2|f_z|^2+|b|^2|\overline{f}_z|^2-|a|^2|f_{\overline{z}}|^2-|b|^2|\overline{f}_{\overline{z}}|^2=\\&(|a|^2-|b|^2)(|f_z|^2+|f_{\overline{z}}|^2)=(|a|^2-|b|^2)J_f(z).\end{aligned}$$

故由 $f\in B_{\mathrm{BH}}$可知,$F\in B_{\mathrm{BH}}$.

2) 令 $F=f\circ\varphi_\alpha=|\varphi_\alpha(z)|^2h\circ\varphi_\alpha$,则有

$$\begin{aligned}F_z=&\frac{1-|\alpha|^2}{(1+\overline{\alpha}z)^2}\overline{\varphi_\alpha(z)}h\circ\varphi_\alpha+|\varphi_\alpha(z)|^2\frac{1-|\alpha|^2}{(1+\overline{\alpha}z)^2}h'_1\circ\varphi_\alpha=\\&\frac{1-|\alpha|^2}{(1+\overline{\alpha}z)^2}(|\varphi_\alpha(z)|^2h'_1\circ\varphi_\alpha+\overline{\varphi_\alpha(z)}h\circ\varphi_\alpha),\end{aligned}$$

同理可得

$$F_{\overline{z}}=\overline{\frac{1-|\alpha|^2}{(1+\overline{\alpha}z)^2}}(|\varphi_\alpha(z)|^2\overline{h'_2\circ\varphi_\alpha}+\varphi_\alpha(z)h\circ\varphi_\alpha).$$

从而有

$$(1-|z|^2)\sqrt{J_F(z)}=(1-|z|^2)\frac{1-|\alpha|^2}{(1+\overline{\alpha}z)^2}\sqrt{|F_z|^2-|F_{\overline{z}}|^2|}=$$

$$(1-|\varphi_\alpha(z)^2|)\sqrt{|J_f(\varphi_\alpha(z))|}.$$

因此，有 $\beta(f)=\beta(F)$，这隐含着 $f\circ\varphi_\alpha\in B_{\mathrm{BH}}$，证毕.

**定理 1**　假设 $F=H+\overline{G}$ 为 $D$ 上单叶且保向的调和函数，若函数 $f=|z|^2h$ 保向 $h=h_1+\overline{h}_2$，且解析函数 $h_1$ 与 $h_2$ 满足 $zh_1=\log H'$，$\int_0^z h_2(t)\mathrm{d}t\in B_A$，则 $f\in B_{\mathrm{BH}}$.

证明　令 $\alpha\in D$，定义

$$\Phi(z)=\frac{F\left(\frac{\alpha+z}{1+\overline{\alpha}z}\right)-F(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)H'(\alpha)},$$

则 $\Phi(z)$ 在 $D$ 上单叶调和，且满足 $\Phi(0)=0$，$\Phi_z(0)=1$. 因此，它的展开式的系数 $a_2(\alpha)$ 的模有界，且满足

$$a_2(\alpha)=(1-|\alpha|^2)\frac{H''}{2H'}-\overline{\alpha}.$$

这隐含着

$$\frac{H''}{2H'}=\frac{2(a_2(\alpha)+\overline{\alpha})}{(1-|\alpha|^2)}.\tag{1}$$

又由 $\int_0^z h_2(t)\mathrm{d}t\in B_A$，有

$$(1-|z|^2)|h_2|<\infty.\tag{2}$$

由于

$$\begin{aligned}(1-|\alpha|^2)\sqrt{J_f(\alpha)}&=(1-|\alpha|^2)\sqrt{|f_z(\alpha)|^2-|f_{\overline{z}}(\alpha)|^2}=\\&(1-|\alpha|^2)\sqrt{|\overline{\alpha}h+|\alpha|^2h'_1|^2-|\alpha h+|\alpha|^2\overline{h}'_2|^2}\leqslant\\&(1-|\alpha|^2)|\overline{\alpha}h+|\alpha|^2h'_1|\leqslant(1-|\alpha|^2)|\alpha||h+\alpha h'_1|\leqslant\\&(1-|\alpha|^2)|\overline{h}_2+(\alpha h_1)'|\leqslant(1-|\alpha|^2)(|h_2|+|(\alpha h_1)'|).\end{aligned}$$

因此，结合式(1)，(2)，可得 $(1-|\alpha|^2)\sqrt{J_f(\alpha)}<\infty$，即 $f\in B_{\mathrm{BH}}$，证毕.

**定理 C**　令 $f=h+\overline{g}$ 为单位圆盘 $D$ 上的保向调和函数，其复伸张为 $\omega$. 如果对于所有的 $z\in D$，有

$$|zP_f(z)|+\frac{|z\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}$$

成立，则函数 $f$ 为单叶函数，其中，$P_f=\frac{h''}{h'}-\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}$ 为 $f$ 的 Pre-Schwarz 导数[14].

假设函数 $\omega$：$D\to D$ 解析，定义

$$\omega^*(z)=\frac{\omega'(z)(1-|z|^2)}{1-|\omega|^2}$$

为它的双曲偏导数，$\|\omega\|_h=\sup_{z\in D}|\omega^*(z)|$ 为它的双曲范数[15].

**定理 2**　假设 $f=|z|^2h\in B_{\mathrm{BH}}$，$h=h_1+h_2$，且 $f$ 是 $K$-拟正则的. 对 $0<\varepsilon<1$，令

$$H(z)=\int_0^z\exp\frac{\varepsilon\left(\zeta^2h_1+\int_0^\zeta\tau(h_2-h_1)\mathrm{d}\tau\right)}{c}\mathrm{d}\zeta.$$

上式中：$c=\frac{\beta(f)(K+1)}{\sqrt{K}}$. 如果 $\omega$：$D\to D$ 是解析的，且满足 $\|\omega\|_h\leqslant\frac{1-\varepsilon}{2}$，则以 $\omega$ 为复伸张的调和函数 $F=H+\overline{G}$ 在 $D$ 上是单叶的.

证明　由假设 $f\in B_{\mathrm{BH}}$，可得

$$(1-|z|^2)\sqrt{J_f}=(1-|z|^2)|z||(zh_1)'+h_2|\sqrt{1-|\omega_f|^2}\leqslant\beta(f).$$

又由于 $f$ 为 $K$-拟正则映照，有

$$|z||(zh_1)'+h_2|\leqslant\frac{\beta(f)}{(1-|z|^2)\sqrt{1-|\omega_f|^2}}\leqslant\frac{\beta(f)(K+1)}{(1-|z|^2)\sqrt{K}}=\frac{c}{1-|z|^2}.$$

上式隐含着

$$\left|\frac{H''}{H'}\right|=\frac{\varepsilon}{c}\left|z(zh_1)'+zh_2\right|=\frac{\varepsilon}{c}|z|\left|(zh_1)'+h_2\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{1-|z|^2}.$$

由于

$$\frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\leqslant\frac{\|\omega\|_h}{1-|z|^2}\leqslant\frac{1-\varepsilon}{2(1-|z|^2)},$$

所以可得

$$|zP_F(z)|+\frac{|z\omega'_F(z)|}{1-|\omega_F(z)|^2}\leqslant\left|\frac{H''}{H'}\right|+\frac{2|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}.$$

由定理 C 知函数 $F$ 在 $D$ 上单叶. 证毕.

为了方便,给出函数 $f$ 幂级数表达式,即 $h_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $h_2=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$.

**定理 3** 若 $f=|z|^2h\in B_{\mathrm{BH}}$ 是 $K$-拟正则的,且 $|h|<M$,则当 $n\geqslant1$ 时,有

$$|a_n|\leqslant e\frac{n+3}{2n}\left(M+\frac{\beta(f)(K+1)}{\sqrt{K}}\right).$$

上式中:$M$ 为一正常数.

证明 由 $f\in B_{\mathrm{BH}}$,可知 $(1-|z|^2)\sqrt{J_f(z)}\leqslant\beta(f)$,即

$$\begin{aligned}&(1-|z|^2)\sqrt{|\bar{z}h+|z|^2h'_1|^2-|zh+|z|^2\bar{h}'_2|^2}=\\&(1-|z|^2)|z||h+zh'_1|\sqrt{1-|\omega(z)|^2}\leqslant\beta(f).\end{aligned}\tag{3}$$

式(3)中:$|\omega(z)|=\dfrac{|h+zh'_1|}{|h+z\bar{h}'_2|}=|\omega_f(z)|=\dfrac{|\bar{z}h+|z|^2h'_1|}{|zh+|z|^2\bar{h}'_2|}=\dfrac{|\bar{h}_2+(zh_1)'|}{|\bar{h}_1+(zh_2)'|}$.

由函数 $f$ 是 $K$-拟正则的,可知对任意的 $z\in D$,有 $|\omega(z)|=|\omega_f(z)|<\dfrac{K-1}{K+1}$.

令 $z=re^{\mathrm{i}t}$, $t\in(0,2\pi)$, $r\in(0,1)$,则有

$$h'_1=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nr^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)},$$

所以

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)}\frac{h'_1}{r^{n-1}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\max\limits_{|z|=r}|h'_1|}{nr^{n-1}}.\tag{4}$$

又由于 $\beta(f)$ 的定义可知,对 $\forall z\in D$,有

$$(1-|z|^2)\sqrt{J_f}\leqslant\beta(f).$$

结合式(3),可得 $\forall z\in D$. 由

$$|h+zh'_1|\leqslant\frac{\beta(f)}{(1-|z|^2)|z|\sqrt{1-|\omega(z)|^2}},$$

进而有

$$|zh'_1|\leqslant M+\frac{\beta(f)}{(1-|z|^2)|z|\sqrt{1-|\omega(z)|^2}},\qquad\forall z\in D,$$

从而有

$$\max_{z\in D}|zh'_1|\leqslant M+\frac{\beta(f)}{(1-|z|^2)|z|\sqrt{1-|\omega(z)|^2}}.$$

将 $z=re^{\mathrm{i}t}$, $t\in(0,2\pi)$, $r\in(0,1)$ 代入,可得

$$\max_{r\in(0,1)}|zh'_1|\leqslant M+\frac{\beta(f)}{(1-r^2)r\sqrt{1-|\omega|^2}}.\tag{5}$$

由式(4),(5)可得

$$|a_n|\leqslant\frac{M}{nr^n}+\frac{\beta(f)}{(1-r^2)nr^{n+1}\sqrt{1-|\omega|^2}}\leqslant\frac{1}{(1-r^2)r^{n+1}}\left(\frac{M}{n}+\frac{\beta(f)(K+1)}{n\sqrt{K}}\right).$$

对于函数 $r^{n+1}(1-r^2)$，$r\in(0,1)$，通过计算，当 $r=\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}$ 时，该函数取最大值. 将 $r=\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}$ 代入，可得

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{(1-r^2)r^{n+1}}\left(\frac{M}{n}+\frac{\beta(f)(K+1)}{n\sqrt{K}}\right)\leqslant\left(M+\frac{\beta(f)(K+1)}{\sqrt{K}}\right)\varphi(n)\,\frac{n+3}{2n}.$$

上式中：$\varphi(x)=(1+\frac{2}{x+1})^{\frac{x+1}{2}}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=e$. 由于 $\log\varphi(x)=\frac{x+1}{2}\log\varphi(x)=\frac{x+3}{x+1}$，令

$$\psi(x)=\log\varphi(x)'=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right)-\frac{1}{x+3},$$

则有 $\psi'(x)=-\frac{1}{(x+3)(x+1)}+\frac{1}{(x+3)^2}$. 因此，当 $x\geqslant1$ 时，$\psi'(x)<0$，$\psi(x)$ 单调递减，从而有 $\psi(x)>\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=0$，$\varphi'(x)>0$. 即当 $x\geqslant1$ 时 $\varphi(x)\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=e$，得证.

**参考文献：**


[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bulletin of the American Mathematical Society,1936,42(10):689-698.

[2] DUREN P. Harmonic univalent functions[M]. Cambridge:Cambridge University Press,2004:1-17.

[3] CLUNIE J,SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A,1984,9(1):3-25.

[4] ABDULHADI Z,MUHANNA Y,KHURI S. On univalent solutions of the biharmonic equation[J]. J Inequal Appl,2005,5(2005):469-478.

[5] KALAJ D. On quasiregular mappings between smooth Jordan domains[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2010,362 (1):58-63.

[6] AHLFORS L V,EARLE C J. Lectures on quasiconformal mappings[M]. New York:American Mathematical Society,1966:21-34.

[7] ANDERSON J M,CLUNIE J,POMMERENKE C. On Bloch functions and normal functions[J]. J Reine Angew Math,1974,270:12-37.

[8] DANIKAS N. Some Banach spaces of analytic functions, function spaces and complex analysis, joensuu[J]. Univ Joensuu Dep Math Rep Ser,1997,2:9-35.

[9] POMMERENKE C. On Bloch functions[J]. J London Math Soc,1970,2(2):689-695.

[10] EFRAIMIDIS I,GAONA J,HERNÁNDEZ R,*et al*. On harmonic Bloch-type mappings arXiv preprint arXiv[DB/OL]. [2016-07-15][2016-09-05]. https://arxiv. org/pdf/1607. 04626v1. pdf.

[11] POMMERENKE C. Boundary behaviour of conformal maps[M]. Berlin:Springer-Verlag,1992:185-187.

[12] SEIDEL J,WALSH L. On the derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and of *p*-valence[J]. Trans Amer Math Soc,1942,52(1):128-216.

[13] ZHU K. Operator theory in function spaces, marcel dekker[M]. New York: American Mathematical Soc,2007:101-132.

[14] HERNÁNDEZ R,MARTÍN M J. Pre-Schwarzian and Schwarzian derivatives of harmonic mappings[J]. J Geom Anal,2015,25(1):64-91.

[15] BEARDON A,MINDA D. The hyperbolic metric and geometric function theory[J]. Quasiconformal Mappings and Their Applications,2007,3:9-56.


（**责任编辑：**陈志贤　　**英文审校：**黄心中）