

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201607009



Kaplansky 计数命题的拓广及应用

唐善刚

(西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637009)

摘要: 应用组合分析技巧, 给出基于线排列与环形排列情形下的经典的 Kaplansky 计数命题的拓广情形, 得到了两个推广后的新的 Kaplansky 计数命题. 通过推广 Ménage 计数问题以及组合恒等式的证明, 所得结果拓展了已有文献的研究结果.

关键词: Kaplansky 计数命题; Ménage 计数问题; 线排列; 环形排列; 组合恒等式; 容斥原理

中图分类号: O 157.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2017)06-0892-06

Generalizations of Kaplansky Enumerating Theorems and Its Applications

TANG Shangang

(College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: By using combinatorial analysis we extend Kaplansky enumerating theorems are to the general conditions under a linear permutation and a circular permutation. Two generalized theorems for the Kaplansky enumerating theorems are obtained. One class of Ménage enumerating problem is extended and some combinatorial identities are proved with the generalized Kaplansky enumerating theorems. Our results generalize those of the previous studies.

Keywords: Kaplansky enumerating theorem; Ménage enumerating problem; linear permutation; circular permutation; combinatorial identity; principle of inclusion-exclusion

Kaplansky 计数命题在 Ménage 计数问题^[1-5]、二重乱序的计数公式^[6]、限位排列^[7-13], 以及第一、二类可重环形排列^[7-13]中有着广泛的应用, 其基本形式可表述为基于线排列与环形排列情形下的组合计数命题.

定理 1^[1,6] 从由数字 $1, 2, \dots, n$ 组成的全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中, 选取 k 个两两不相邻的元素的组合的个数为 $\binom{n-k+1}{k}, n \geq 2k-1$.

定理 2^[1,6] 从由数字 $1, 2, \dots, n$ 组成的环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中, 选取 k 个两两不相邻的元素的组合的个数为 $\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, 2k \leq n$.

文献[6]将定理 1, 2 推广为定理 3, 4.

定理 3^[6] λ 为正整数, 从由数字 $1, 2, \dots, n$ 组成的全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取 k 个元素, 使得选出的任

收稿日期: 2016-07-05

通信作者: 唐善刚(1978-), 男, 副教授, 主要从事组合计数方法理论及应用的研究. E-mail: tangshangang2001@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11401480); 四川省教育厅自然科学基金重点项目(16ZA0173, 17ZA0383)

何两个元素之间至少还间隔有 λ 个元素,则选取这样的 k 个元素的组合的个数为 $\binom{n-(k-1)\lambda}{k}, n \geq (k-1)\lambda + k$.

定理 4^[6] λ 为正整数,从由数字 $1, 2, \dots, n$ 组成的环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取 k 个元素,且使得选出的任何两个元素之间至少还间隔有 λ 个元素,则选取这样的 k 个元素的组合的个数为 $\frac{n}{n-\lambda k} \binom{n-\lambda k}{k}, n \geq \lambda k + k$.

1 Kaplansky 计数命题的再拓广

进一步将定理 3, 4 拓广为基于如下的线排列与环形排列情形下的组合计数命题.

定理 5 设 λ 与 s 为正整数,从由数字 $1, 2, \dots, n$ 组成的全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取 k 个元素,并使得这 k 个元素被全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中其余元素分隔成 s 段,且任何两段之间在全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中至少还间隔有 λ 个元素,则从全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取这样的 k 个元素的组合的个数为 $\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-(s-1)\lambda+s}{s}, n \geq k + (s-1)\lambda$.

证明 先假定 $1 < k < n$, 设 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$ 是从全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选出的符合题意的 k 元组合, 设段 $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i}$ 与段 $a_{(i+1),1}, a_{(i+1),2}, \dots, a_{(i+1),y_{i+1}}$ 之间在全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中间隔的元素个数为 $x_{i+1} (1 \leq i \leq s-1)$; 段 $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,y_1}$ 在全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 之前的元素个数为 x_1 ; 段 $a_{s,1}, a_{s,2}, \dots, a_{s,y_s}$ 在全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 之后的元素个数为 x_{s+1} . 据此, 可得如下的不定方程组, 即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{s+1} = n - k, \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_s = k. \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: $x_1, x_{s+1} \geq 0; x_i \geq \lambda (i = 2, 3, \dots, s); y_j > 0 (j = 1, 2, \dots, s)$.

易知,符合题意的组合 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$ 与方程(1)的整数解 $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_s, y_s, x_{s+1})$ 之间存在一一对应的关系. 不难知道, $\sum_{i=1}^s y_i = k$ 的正整数解 (y_1, y_2, \dots, y_s) 的个数为 $\binom{k-1}{s-1}$,

$\sum_{i=1}^{s+1} x_i = n - k$ 满足 $x_1, x_{s+1} \geq 0, x_i \geq \lambda (i = 2, 3, \dots, s)$ 的整数解 $(x_1, x_2, \dots, x_{s+1})$ 的个数为 $\binom{n-k-(s-1)\lambda+s}{s}$. 从而根据乘法计数原理, 满足方程(1)条件下的整数解 $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_s, y_s, x_{s+1})$ 的个数为 $\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-(s-1)\lambda+s}{s}, 1 < k < n$.

据此, 得到从全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取符合题意的 k 个元素的组合的个数为

$$\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-(s-1)\lambda+s}{s}, \quad 1 < k < n.$$

1) 若 $k=1$, 必有 $s=1$. 显然, 此时符合题意的 k 个元素的组合的个数为 n , 且

$$\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-(s-1)\lambda+s}{s} = n.$$

2) 若 $k=n$ 时, 必有 $s=1$. 显然, 此时符合题意的 k 个元素的组合的个数为 1 , 且

$$\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-(s-1)\lambda+s}{s} = 1.$$

3) 若 $s=1$. 显然, 此时符合题意的 k 个元素的组合的个数为 $n-k+1$, 且

$$\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-(s-1)\lambda+s}{s} = n - k + 1.$$

综上所述, 从全排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取符合题意的 k 个元素的组合的个数为

$$\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-(s-1)\lambda+s}{s}, \quad n \geq k+(s-1)\lambda.$$

定理 6 设 λ 与 s 为正整数, 从由数字 $1, 2, \dots, n$ 组成的环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取 k 个元素, 并使得这 k 个元素被环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中其余元素分隔成 s 段, 且任何两段之间在环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中至少还间隔有 λ 个元素, 则从环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取这样的 k 个元素的组合的个数为

$$\frac{n}{n-s\lambda-k+s} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-s\lambda-k+s}{s}, \quad n \geq s\lambda+k.$$

证明 先假定 $1 < k < n$. 设 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$ 是从 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选出的符合题意的 k 元组合, 于是 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中不属于 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$ 的元素可能为 $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_{j+\lambda} (1 \leq j \leq n)$.

$\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中不属于 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$ 的元素 $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_{j+\lambda} (1 \leq j \leq n)$, 其下标 $j+1, j+2, \dots, j+\lambda$ 约定为 $j+1, j+2, \dots, j+\lambda$ 分别除以 n 所得到的最小正剩余数, 例如, 当 $j=n-1$ 时, 元素 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+\lambda-1}$ 即为 $a_n, a_1, a_2, \dots, a_{\lambda-1}$.

据此, 按照如下 4 个步骤求解.

步骤 1 设从环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取符合题意的 k 元组合为 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$, 且使得 $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_{j+\lambda}$ 不属于 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$ 的组合的个数为 $d_j, 1 \leq j \leq n$.

根据定理 5, 求 d_j 等价于求如下不定方程组的整数解 $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_s, y_s, x_{s+1})$ 的个数, 即

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{s+1} &= n - k - \lambda, \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_s &= k. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

式(2)中: $x_1, x_{s+1} \geq 0; x_i \geq \lambda (i=2, 3, \dots, s); y_j > 0 (j=1, 2, \dots, s)$.

易知, 满足方程(2)条件下的整数解 $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_s, y_s, x_{s+1})$ 的个数为 $\binom{k-1}{s-1} \binom{n-s\lambda-k+s}{s}$,

即 $d_j = \binom{k-1}{s-1} \binom{n-s\lambda-k+s}{s}, 1 \leq j \leq n$.

步骤 2 根据步骤 1 的结果, 在有重复计数情形下的从环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中, 选取符合题意的 k 个元素的组合的个数为 $\sum_{j=1}^n d_j = n \binom{k-1}{s-1} \binom{n-s\lambda-k+s}{s}$.

步骤 3 不妨设从 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中, 选取符合题意的 k 元组合为 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$, 按照逆时针方向, 设段 $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i+1}$ 与段 $a_{(i+1),1}, a_{(i+1),2}, \dots, a_{(i+1),y_{i+1}}$ 之间在 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中间隔的元素个数为 $x_i (1 \leq i \leq s-1)$; 段 $a_{s,1}, a_{s,2}, \dots, a_{s,y_s}$ 与段 $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,y_1}$ 之间在 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中间隔的元素个数为 x_s , k 元组合 $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,y_i} \mid 1 \leq i \leq s\}$ 在 $\sum_{j=1}^n d_j$ 中恰好被重复计算 $\sum_{i=1}^s (x_i - \lambda + 1) = n - s\lambda - k + s$ 次.

步骤 4 根据步骤 3 的结果, 从环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取 k 个元素, 并使得这 k 个元素被环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中其余元素分隔成 s 段, 且任何两段之间在环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中至少还间隔有 λ 个元素的组合的个数为

$$\frac{n}{n-s\lambda-k+s} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-s\lambda-k+s}{s}, \quad 1 < k < n.$$

1) 若 $k=1$ 时, 必有 $s=1$. 显然, 此时符合题意的 k 个元素的组合的个数为 n , 且

$$\frac{n}{n-s\lambda-k+s} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-s\lambda-k+s}{s} = n.$$

2) 若 $s=1$ 时, 显然, 符合题意的 k 个元素的组合的个数为 n , 且

$$\frac{n}{n-s\lambda-k+s} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-s\lambda-k+s}{s} = n.$$

综上所述, 从环形排列 $\odot a_1 a_2 \cdots a_n$ 中选取符合题意的 k 个元素的组合的个数为

$$\frac{n}{n-s\lambda-k+s} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-s\lambda-k+s}{s}, \quad n \geq s\lambda+k.$$

2 Kaplansky 计数命题的应用

Ménage 计数问题是一个著名的组合学问题,由法国数学家 Lucus 提出,即求 n 对夫妻围圆桌而坐,且男女相间夫妻不相邻的坐法数. 1986 年, Bogart 等^[1]又提出了所谓的“不要求男女相间的“放松的夫妻对围坐计数问题”. 文献[2-3]利用容斥原理将 Ménage 计数问题推广为多维情形下的计数问题加以研究. 文中将经典的 Ménage 计数问题推广为如下情形.

Ménage 计数问题的推广如下:有 n 组学生,且每组学生中男、女生人数均为 λ 人, n 组学生围圆桌而坐. 设 α 与 β 是 n 组学生围圆桌而坐的两种坐法方式, $\alpha=\beta$ 当且仅当每个学生在 α 及 β 中与之相邻的人组成的集合是相等的.

1) 求满足上述约定下的 n 组学生男女相间围圆桌而坐,且恰好有 r 组学生中的每组学生是坐在一起而坐的坐法方式数 $f_1(n, \lambda)$.

2) 求满足上述约定下的 n 组学生男女相间围圆桌而坐,且恰好使得其中指定的 r 组学生中的每组学生是坐在一起而坐的坐法方式数 $f_2(n, \lambda)$.

3) 求满足上述约定下的 n 组学生男女相间围圆桌而坐,且至多有 r 组学生中的每组学生是坐在一起而坐的坐法方式数 $f_3(n, \lambda)$.

4) 求满足上述约定下的 n 组学生男女相间围圆桌而坐,且至少有 r 组学生中的每组学生是坐在一起而坐的坐法方式数 $f_4(n, \lambda)$.

为行文方便起见,对围圆桌的 $2\lambda n$ 个座位按照逆时针方向以自然顺序编号,其座位号分别标记为 $1, 2, 3, \dots, 2\lambda n$.

1) 从围圆桌的座位号分别标记为 $1, 2, 3, \dots, 2\lambda n$ 的座位中选取 k 个座位,并使得这 k 个座位被其余的座位分隔成 k 段,且任何两段之间至少还间隔有 $2\lambda-1$ 个座位,根据定理 6,选取这样的 k 个座位的组合的个数为 $\frac{2\lambda n}{2\lambda n - 2k\lambda + k} \binom{2\lambda n - 2k\lambda + k}{k}, k \leq n$.

2) 不妨设满足情形 1) 下的 k 个座位的组合为 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, 且组合 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ 必然与含有 $2\lambda k$ 个座位的组合 $\{i_s, i_s+1, i_s+2, \dots, i_s+2\lambda-1 | 1 \leq s \leq k\}$ 之间存在一一对应的关系. 将指定的某组学生男女相间安排在座位 $i_1, i_1+1, i_1+2, \dots, i_1+2\lambda-1$ 上入坐的坐法方式数为 $2(\lambda!)^2$; 而将指定的另外某组学生男女相间安排在座位 $i_s, i_s+1, i_s+2, \dots, i_s+2\lambda-1$ 上入坐的坐法方式数为 $(\lambda!)^2, 2 \leq s \leq k$; 最后,剩余的 $n-k$ 组学生男女相间入坐在剩余的 $2\lambda n - 2\lambda k$ 个座位上的坐法方式数为 $((\lambda n - \lambda k)!)^2$.

由于围圆桌而放置的座位是带有标号的,故组合 $\{i_s, i_s+1, i_s+2, \dots, i_s+2\lambda-1 | 1 \leq s \leq k\}$ 中代表座位编号的具体数字都约定为它们除以 $2\lambda n$ 后所得的最小正剩余数.

3) 根据情形 1), 2) 的相应结果, n 组学生男女相间围着带有标号的 $2\lambda n$ 个座位的圆桌而坐,其中,指定的 k 组学生中的每组学生坐在一起而坐的坐法方式数为 $\frac{4\lambda n k! (\lambda!)^{2k} ((\lambda n - \lambda k)!)^2}{2\lambda n - 2k\lambda + k} \binom{2\lambda n - 2k\lambda + k}{k}$.

显然 n 组学生男女相间围着带有标号的 $2\lambda n$ 个座位的圆桌而坐的坐法方式数为 $2((\lambda n)!)^2$, 即

$$\frac{4\lambda n k! (\lambda!)^{2k} ((\lambda n - \lambda k)!)^2}{2\lambda n - 2k\lambda + k} \binom{2\lambda n - 2k\lambda + k}{k}.$$

当 $k=0$ 时, 上式仍然成立.

4) $f_i(n, \lambda)$ 即为二面体群 $D_{2\lambda n}$ 作用于由 $2\lambda n$ 个学生男女相间围着带有标号的 $2\lambda n$ 个座位的圆桌而坐的所有坐法方式构成的集合的轨道数 $(1 \leq i \leq 4)$. 运用 Burnside 引理^[8-13]及容斥原理^[2-3, 14-16], 即得定理 7.

定理 7 推广的 Ménage 计数问题的结果为

$$f_1(n, \lambda) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{n}{k} \binom{2\lambda n - 2k\lambda + k}{k} \frac{k! (\lambda!)^{2k} ((\lambda n - \lambda k)!)^2}{2\lambda n - 2k\lambda + k}, \tag{3}$$

$$f_2(n, \lambda) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{n-r}{k-r} \binom{2\lambda n - 2k\lambda + k}{k} \frac{k! (\lambda!)^{2k} ((\lambda n - \lambda k)!)^2}{2\lambda n - 2k\lambda + k}, \tag{4}$$

$$f_3(n,\lambda) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r} \binom{n}{k} \binom{2\lambda n - 2k\lambda + k}{k} \frac{k!(\lambda!)^{2k}((\lambda n - \lambda k)!)^2}{2\lambda n - 2k\lambda + k}, \tag{5}$$

$$f_4(n,\lambda) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} \binom{n}{k} \binom{2\lambda n - 2k\lambda + k}{k} \frac{k!(\lambda!)^{2k}((\lambda n - \lambda k)!)^2}{2\lambda n - 2k\lambda + k}. \tag{6}$$

式(5),(6)中:若 $x>y\geqslant 0$, $\binom{y}{x}=0$;若 $x\geqslant 0$, $\binom{-1}{x}=(-1)^x$;若 $x\geqslant 0$, $\binom{x}{0}=1$; $\binom{-1}{-1}=1$;若 $y\geqslant 0>x$, $\binom{y}{x}=0$.

定理 8 证明下列组合恒等式

$$\sum_{s=1}^k n \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s} = \sum_{s=1}^k (n-k) \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k+1}{s}, \quad 0 < k < n, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^k (-1)^k (n-k)! \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!, \quad n > 0. \tag{8}$$

式(8)中: $\binom{-1}{-1}=1$;若 $a\geqslant 0>b$, $\binom{a}{b}=0$;若 $x\geqslant 0$, $\binom{x}{0}=1$;若 $x>y\geqslant 0$, $\binom{y}{x}=0$.

证明 1) 从由数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的全排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中选取 k 个元素的组合数为 $\binom{n}{k}$, 显见, 这 $\binom{n}{k}$ 个组合被分为如下类型: 从全排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中选取的 k 个元素被全排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的其余元素分隔成 s 段的组合数, 根据定理 5, 有 $\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k+1}{s}, 1\leqslant s\leqslant k$.

从而, 由加法计数原理, 即有 $\binom{n}{k} = \sum_{s=1}^k \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k+1}{s}$.

另一方面, 从由数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的环形排列 $\odot a_1a_2\cdots a_n$ 中选取 k 个元素的组合的个数为 $\binom{n}{k}$, 且这 $\binom{n}{k}$ 个组合被分为如下若干类型: 从环形排列 $\odot a_1a_2\cdots a_n$ 中选取的 k 个元素被环形排列 $\odot a_1a_2\cdots a_n$ 的其余元素分隔成 s 段的组合数, 根据定理 6, 有 $\frac{n}{n-k} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s}, 1\leqslant s\leqslant k$.

从而, 由加法计数原理, 有 $\binom{n}{k} = \sum_{s=1}^k \frac{n}{n-k} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s}, \sum_{s=1}^k \frac{n}{n-k} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s} = \sum_{s=1}^k \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k+1}{s} \circ \sum_{s=1}^k n \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s} = \sum_{s=1}^k (n-k) \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k+1}{s}$.

2) 求由数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的不含数对 $(i,i+1) (i=1,2,\cdots,n-1)$ 的全排列的个数. 令 A 表示由数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有全排列的集合, 对于 $\pi\in A$, 数对 $(i,i+1)$ 界定命题 $P_i(\pi)$ 为 $P_i: \pi$ 中含有数对 $(i,i+1)$, 其中, $i=1,2,\cdots,n-1$.

设 $A_i = \{\pi \in A \mid P_i(\pi)\}, \bar{A}_i = \{\pi \in A \mid \pi \notin A_i\}$. 所以, 由数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的不含数对 $(i,i+1) (i=1,2,\cdots,n-1)$ 全排列的个数为 $|\bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i|$. 根据容斥原理^[2-3,14-16], 有 $|\bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i| = n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n-1} |\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}|$.

易知, $|\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}| = (n-k)!$, 从而 $|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!$. 由定理 5, 从 $n-1$ 个命题的全排列 $P_1P_2\cdots P_{n-1}$ 中选取 $k(k>0)$ 个性质, 且被 $P_1P_2\cdots P_{n-1}$ 的其余命题分隔成 s 段的组合 $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots P_{i_k}\}$ 的个数为 $\binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s}$, 并且 $|\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}| = (n-(k+s)+s)! = (n-k)!$. 当 $n-1\geqslant k>0$ 时,

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} |\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}| = \sum_{s=1}^k \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s} (n-k)! . \text{ 当 } n-1 \geq k > 0 \text{ 时, } \binom{k-1}{-1} \binom{n-k}{0} (n-k)! = 0, \text{ 即 } \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} |\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}| = \sum_{s=0}^k \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s} (n-k)! , \sum_{s=0}^0 \binom{-1}{s-1} \binom{n}{s} n! = n! .$$

据此有

$$|\bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i| = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^k (-1)^k (n-k)! \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s} .$$

从而有

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^k (-1)^k (n-k)! \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k}{s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! .$$

3 结束语

将文献[6]的 Kaplansky 计数命题推广至更具一般化情形下的基于线排列与环形排列下的新的组合计数命题,从理论上拓宽了经典的 Kaplansky 计数命题的适用范围;给出了从理论上推广后的新的 Kaplansky 计数命题在具体组合问题中的应用,拓展了相关文献的结果.

参考文献:

- [1] 林翠琴. 组合学与图论[M]. 北京:清华大学出版社,2009.
- [2] 唐善刚. 关于“容斥原理的推广及其应用”的注记[J]. 山东大学学报(理学版),2012,47(10):64-69. DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.2012.10.014.
- [3] 唐善刚. 赋权有限集上的容斥原理及应用[J]. 浙江大学学报(理学版),2014,41(2):123-126. DOI:10.3785/j.issn.1008-9497.2014.02.001.
- [4] 曹汝成. 广义容斥原理及其应用[J]. 数学研究与评论,1988,8(4):526-530.
- [5] 魏万迪. 广容斥原理及其应用[J]. 科学通报,1980,25(7):296-299.
- [6] 李磊. 关于几个组合计数公式的推广[J]. 工程数学学报,1996,13(4):95-98.
- [7] 李乔. 组合数学基础[M]. 北京:高等教育出版社,1993.
- [8] 卢开澄,卢华明. 组合数学[M]. 4 版. 北京:清华大学出版社,2006.
- [9] 许胤龙,孙淑玲. 组合数学引论[M]. 2 版. 合肥:中国科学技术大学出版社,2010.
- [10] 柯召,魏万迪. 组合论[M]. 北京:科学出版社,1981.
- [11] 屠规彰. 组合计数方法及其应用[M]. 北京:科学出版社,1981.
- [12] 姜建国,岳建国. 组合数学[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2003.
- [13] 曹汝成. 组合数学[M]. 广州:华南理工大学出版社,2000.
- [14] 唐善刚. 容斥原理的拓展及其应用[J]. 山东大学学报(理学版),2010,45(12):12-15.
- [15] 唐善刚. 容斥原理的拓展及其应用(Ⅱ)[J]. 山东大学学报(理学版),2011,46(12):70-75.
- [16] BENDER E A, GOLDMAN J R. Mobius inversion in combinatorial analysis[J]. Amer Math Monthly, 1975(82): 789-802. DOI:10.3785/j.issn.1008-9497.2014.02.001.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)