

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201806043



重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程

翁智峰, 姚泽丰, 赖淑琴

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用重心插值配点法(重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法)构造包含时间、空间变量的近似函数, 给定 Chebyshev 点族; 将重心插值配点法代入 Allen-Cahn 方程及定解条件, 得到离散方程组, 并采用 Newton 迭代格式求解方程组. 数值算例表明: 文中的配点法具有较高精度; 利用 2 种配点法的能量函数满足能量递减规律.

关键词: Allen-Cahn 方程; 重心插值配点法; Chebyshev 点族; Newton 迭代格式; 能量递减

中图分类号: O 241.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2019)01-0133-08

Barycentric Interpolation Collocation Method for Allen-Cahn Equation

WENG Zhifeng, YAO Zefeng, LAI Shuqin

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Barycentric interpolation collocation method (barycentric Lagrange interpolation collocation method and Centroid rational interpolation collocation method) is proposed in this paper for the Allen-Cahn equation. By this barycentric interpolation collocation method to construct approximate time and space function based on Chebyshev nodes, we use Newton iteration method to solve Allen-Cahn equation for nonlinear terms and obtain the discrete equations. Numerical examples show that the barycentric interpolation collocation method has high precision and the energy function satisfies the energy decrement law.

Keywords: Allen-Cahn equation; barycentric interpolation collocation method; Chebyshev nodes; Newton iterative method; energy decline

1979 年, 为描述晶体中反相位边界运动, Allen 和 Cahn 引入 Allen-Cahn 方程. Allen-Cahn 方程广泛运用于处理诸如图像分析^[1]、平均曲率-流量^[2]、晶体生长^[3]等问题, 也用于描述生物种群的竞争与排斥现象^[4]、河床的迁移过程^[5]等许多扩散现象. 研究 Allen-Cahn 方程的数值解方法有很多, 如有限差分^[6-7]、有限元^[8-9]、谱方法^[10-11]等. Zhai 等^[7]利用紧致差分交替方向隐式(ADI)方法求解高维 Allen-Cahn 方程. Feng 等^[8]给出内罚间断有限元方法求解 Allen-Cahn 方程的理论分析. Feng 等^[10]利用 P -自适应谱亏量校正法求解 Allen-Cahn 方程. 文献[11-14]采用算子分裂方法求解 Allen-Cahn 方程. 这些方法都是基于网格剖分方法求解. 重心插值配点法是通过采用一些特殊的插值节点, 如 Chebyshev 点族, 以得到较高的数值精度及稳定性. 庄清渠等^[15]采用 Birkhoff 配点法求解四阶常微分方程. 李淑萍等^[16]提出可以同时在空间域和时间域采用重心插值配点法计算, 在很大程度上, 扩展该方法的研究领域.

收稿日期: 2018-06-25
通信作者: 翁智峰(1985-), 男, 讲师, 博士, 主要从事偏微分方程数值解的研究. E-mail: zfwmath@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701197); 华侨大学中青年教师优秀青年科技创新人才项目(ZQN-YX502)

在利用重心插值配点法对 Allen-Cahn 方程进行数值计算时,可以采用直接线性化迭代格式或 Newton 线性化迭代格式进行求解. 一般来说,Newton 线性化迭代格式的收敛速度要比直接迭代线性化迭代格式快,在一些直接线性化迭代法不收敛的非线性问题上,线性化迭代格式是收敛的. 因此,本文采用一种高精度无网格方法-重心插值配点法对 Allen-Cahn 方程进行数值求解.

1 Allen-Cahn 方程的数值解

1.1 Allen-Cahn 方程

Allen-Cahn 方程是一类非齐次半线性泊松方程. 设基本能量泛函为 $E(u)$,它是由 u 离开物相的惩罚项 $F(u)$ 和扩散项 Δu 决定,则 Allen-Cahn 方程可表示为

$$E(u) = \int_b^a [\frac{1}{\epsilon^2} F(u) + \frac{1}{2} | \nabla u^2 |]. \tag{1}$$

式(1)中: $F(u)=\frac{1}{4}(u^2-1)^2$ 关于 u 求导,得 $F'(u)=u(u^2-1)$. $F(u)$ 的图像,如图 1 所示. 由图 1 可知: $u=\pm 1$ 为图像的稳定点,也是极小值点.

通过对式(1)进行变分和 Taylor 展开,可得 Allen-Cahn 方程,即

$$\left. \begin{aligned} u_t + \frac{1}{\epsilon^2} u(u^2-1) - \Delta u &= 0, & t \in [0,T], \\ u(a,t) = 1, \quad u(b,t) &= -1, & t \in [0,T], \\ u_0(x) = u(x,0), & & x \in [a,b]. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

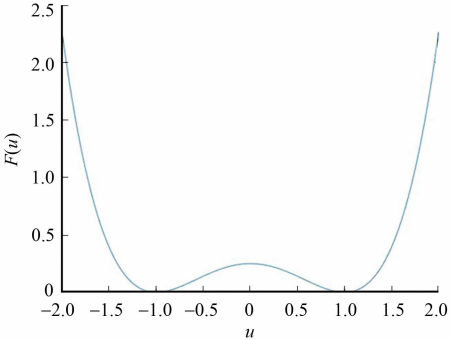


图 1 $F(u)=\frac{1}{4}(u^2-1)^2$ 的图像

Fig. 1 Image of $F(u)=\frac{1}{4}(u^2-1)^2$

1.2 Langrange 插值

设有 $n+1$ 个不同的插值节点 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$,以及其相对应的一组实数 f_j . 若多项式插值 $p(x)$ 满足 $p(x_j)=f_j,j=1,2,\cdots,n$,则多项式插值可以写成 Langrange 插值公式,即

$$p(x) = \sum_{j=1}^n L_j(x) f_j, \quad L_j(x) = \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

式(3)中: $L_j(x)$ 为 Langrange 插值基函数, $L_j(x_k)=\delta_{j,k}=\begin{cases} 1, & j=k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$

1.3 重心 Langrange 插值

令 $l(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$,定义重心权 $\omega_j = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (x_j - x_k)}, j = 1, 2, \cdots, n$, 则插值基函数可以表示为

$$L_j(x) = \frac{l(x)\omega_j}{x - x_j}, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

将式(4)代入 Langrange 插值式(3),得到 Langrange 插值的另一种表现形式,即

$$p(x) = l(x) \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} f_j. \tag{5}$$

将式(5)插值常数 1,可得恒等式为

$$1 = \sum_{j=1}^n L_j(x) = l(x) \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{x - x_j}. \tag{6}$$

依据式(5),(6),重心 Langrange 插值公式为

$$p(x) = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} f_j}{\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{x - x_j}}. \tag{7}$$

重心 Langrange 插值是向前稳定的,但在数值分析中,常用等距插值节点,其插值是病态的. 通过选用一些特殊的插值节点分布,重心 Langrange 插值公式具有非常好的数值稳定性.

采用第 2 类 Chebyshev 点族,节点 $x_j = \cos(\frac{j}{n}\pi), j=0,1,\cdots,n$,其重心 Langrange 插值的插值权为

$$\omega_j = (-1)^j \delta_j, \delta_j = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j=0 \text{ 或 } n, \\ 1, & \text{其他.} \end{cases}$$

1.4 重心有理插值

给定插值节点 $x_j, i=0,1,\cdots,n$,以及其对应的函数值 f_i ,选择一个整数 d 满足 $0 \leq d \leq n$,对于每一个 $i=0,1,\cdots,n-d$,令 p_i 为插值 $d+1$ 个点对 $(x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}), \cdots, (x_{i+d}, f_{i+d})$ 的多项式,其次数至多为 d 个,则

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x)}. \tag{8}$$

式(8)中: $\lambda_i(x) = (-1)^i / ((x - x_i) \cdots (x - x_{i+d}))$.

将多项式 $p_i(x)$ 写成 Langrange 公式的形式,有

$$\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) p_i(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{x - x_k} f_k. \tag{9}$$

式(9)中: $\omega_k = \sum_{i \in J_k} (-1)^i \prod_{j=i, j \neq k}^{i+d} \frac{1}{x_k - x_j}$. 指标集 $J_k = \{i \in I: k-d \leq i \leq k\}$,常数 1 的 Langrange 插值

公式有恒常式 $1 = \sum_{k=i}^{i+d} \prod_{j=i, j \neq k}^{i+d} \frac{x - x_i}{x_k - x_j}$, 由此可得

$$\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{x - x_k}. \tag{10}$$

将式(9),(10)代入式(8),可得到重心有理插值公式 $r(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} f_j}{\sum_{i=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j}}$. 其中,插值权 ω_j 由 $\omega_k =$

$$\sum_{i \in J_k} (-1)^i \prod_{j=i, j \neq k}^{i+d} \frac{1}{x_k - x_j} \text{ 确定.}$$

1.5 Newton 迭代格式下的 Allen-Cahn 方程

利用 Taylor 展开,对 Allen-Cahn 方程中 $u_t + u(u^2 - 1)/\epsilon^2 - \Delta u = 0$ 的非线性项 $f(u) = u(u^2 - 1)$ 在函数 u_0 处展开,并忽略其高阶项,可得 $f(u) \approx f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0)$. 将该式运用于 $f(u) = u(u^2 - 1)$, 即可得 $f(u) \approx -2u_0^3 + (3u_0^3 - 1)u$. 因此, $u_t + \frac{1}{\epsilon^2} u(u^2 - 1) - \Delta u = 0$ 的牛顿迭代格式为

$$u_t - u_{x,x} + \frac{1}{\epsilon^2} (3u_{n-1}^2 - 1)u_n = (2u_{n-1}^3)/\epsilon^2. \tag{11}$$

1.6 重心插值配点法计算的 Allen-Cahn 方程

Newton 迭代格式下的 Allen-Cahn 方程显然是 1 个一维的热传导方程,故考虑一般形式的一维热传导方程的推导,其形式为

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k(x,t) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t \in (0, +\infty). \tag{12}$$

式(12)中: $u(a,t)=\varphi_1(t), u(b,t)=\varphi_2(t)$ 为边界条件; $u(x,0)=\psi(x)$ 为初始条件.

1.6.1 一维热传导方程的离散化及推导 设时间 T 的计算区间为 $[0, T]$, 将区域 $[a, b]$ 和 $[0, T]$ 分别离散化为 m, n 个 Chebyshev 计算节点和 $0=t_1<t_2<\cdots<t_n=T$. 区域 $\Omega=[a, b]\times[0, T]$ 上的 $m\times n$ 个张量积型计算节点为 $(x_i, t_j), i=1, \cdots, m, j=1, \cdots, n$; 每个点的值记为 $u_i(t_j)=u(x_i, t_j)=u_{i,j}, i=1, \cdots, m, j=1, \cdots, n$. 则未知函数 $u(x, t)$ 在节点 x_1, x_2, \cdots, x_m 上的重心插值近似值为

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^m L_j(x) u_j(t). \tag{13}$$

将式(13)代入式(12), 则方程在节点 x_1, x_2, \cdots, x_m 上成立, 常微分方程组为

$$\sum_{j=1}^m L_j(x_i) u_j'(t) - k(x_i, t) \sum_{j=1}^m L_j''(x_i) u_j(t) = f(x_i, t), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{14}$$

令 $k(x_i, t)=k_i(t), f(x_i, t)=f_i(t), i=1, 2, \cdots, m$, 注意到 $L_j''(x_i)=C_{i,j}^{(2)}$, 其中, $C_{i,j}^{(k)}, k=1, 2$ 为节点 x_1, x_2, \cdots, x_m 上重心插值的 k 阶微分矩阵元素, 故式(14)写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t) \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} k_1(t) & & \\ & \cdots & \\ & & k_m(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,1}^{(2)} & \cdots & C_{1,m}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m,1}^{(2)} & \cdots & C_{m,m}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

对于区间 $[0, T]$ 上的节点 t_1, t_2, \cdots, t_n , 未知函数 $u_i(t)$ 在节点 t_1, t_2, \cdots, t_n 的值记 $u_i(t_j)=u(x_i, t_j)=u_{i,j}, i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n$.

未知函数 $u_i(t)$ 在节点 t_1, t_2, \cdots, t_n 上的重心插值近似值为

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^n L_k(t) u_{i,k}, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{16}$$

将式(16)代入方程组(15), 且该方程组在节点 t_1, t_2, \cdots, t_n 上成立, 则有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n L_k'(t_j) u_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n L_k'(t_j) u_{m,k} \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} k_1(t_j) & & \\ & \cdots & \\ & & k_m(t_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,1}^{(1)} & \cdots & C_{1,m}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m,1}^{(1)} & \cdots & C_{m,m}^{(1)} \end{bmatrix} \times \right. \\ &\left. \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n L_k(t_j) u_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n L_k(t_j) u_{m,k} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} f_1(t_j) \\ \vdots \\ f_m(t_j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{17} \end{aligned}$$

文中令 $k_i = \text{diag}(k_i(y_1), k_i(y_2), \cdots, k_i(y_n))$, 其中, $i=1, 2, \cdots, m; \mathbf{u}_i = [u_{i,1}, u_{i,2}, \cdots, u_{i,n}]^T; \mathbf{f}_i = [f_{i,1}, f_{i,2}, \cdots, f_{i,n}]^T = [f_i(t_1), f_i(t_2), \cdots, f_i(t_n)]^T$. 并记 $L_k'(t_j)=\mathbf{D}_{k,j}^{(1)}$, 其中, $\mathbf{D}_{k,j}^{(k)}(k=1, 2)$ 为节点 t_1, t_2, \cdots, t_n 上重心插值的 k 阶微分矩阵, 方程组(17)可以改写成矩阵形式, 即

$$(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}^{(1)}) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \cdots & \\ & & k_m \end{bmatrix} (\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix}. \tag{18}$$

式(18)中: 符号 \otimes 为矩阵的 Kronecker 积; $\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{D}^{(k)}(k=1, 2)$ 分别为关于节点和节点 t_1, t_2, \cdots, t_n 的重心插值 k 阶微分矩阵; $\mathbf{I}_m, \mathbf{I}_n$ 分别为 m, n 阶单位矩阵.

1.6.2 一维热传导方程重心插值配点法的形式 重心插值配点法最终的计算格式为

$$[(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}^{(1)}) - k(\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n)] \mathbf{U} = \mathbf{F}. \tag{19}$$

式(19)中: $\mathbf{C}^{(2)}$ 为关于节点 x_1, x_2, \cdots, x_m 的 2 阶微分矩阵, $\mathbf{D}^{(1)}$ 为关于节点 t_1, t_2, \cdots, t_n 的 1 阶微分矩阵; $\mathbf{F} = [f_{1,1}, \cdots, f_{1,n}; f_{2,1}, \cdots, f_{2,n}; \cdots; f_{m,1}, \cdots, f_{m,n}]^T; \mathbf{U} = [u_{1,1}, \cdots, u_{1,n}; u_{2,1}, \cdots, u_{2,n}; \cdots; u_{m,1}, \cdots, u_{m,n}]^T$.

1.6.3 初始及边界条件的处理 对于边界条件, 其离散形式为 $u(x_i, 0)=u_{i,1}=\psi(x_i), i=1, 2, \cdots, m$.

记矩阵形式为

$$(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{e}_n^1) \mathbf{U} = [\psi(x_1), \cdots, \psi(x_m)]^T. \tag{20}$$

式(20)中: \mathbf{e}_n^1 为 n 阶单位矩阵第 1 行.

对于初始条件,其离散形式为

$$u(a, t_k) = u_{1,k} = \varphi_1(t_k), \quad u(b, t_k) = u_{m,k} = \varphi_2(t_k), \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{21}$$

记矩阵形式为

$$(\mathbf{e}_m^1 \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{U} = [\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)]^T, \quad (\mathbf{e}_m^m \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{U} = [\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)]^T. \tag{22}$$

1.7 Allen-Cahn 方程在重心插值配点法下的计算格式

依据节 1.6.1, 1.6.2 可知, Allen-Cahn 方程在重心插值配点法下的计算式为

$$\left[\mathbf{D}^{(0,1)} - \mathbf{D}^{(2,0)} + \text{diag}\left(\frac{3u_{n-1}^2 - 1}{\epsilon^2}\right) \right] \mathbf{u}_n = \frac{2u_{n-1}^2}{\epsilon^2}. \tag{23}$$

采用置换法的边界条件施加方法,对上述公式进行迭代求解. 其中, $\mathbf{D}^{(0,1)}$ 为 t 的一阶微分矩阵, $\mathbf{D}^{(2,0)}$ 为 x 的 2 阶微分矩阵.

2 数值算例

通过数值算例验证重心插值配点法的精度及稳定性. 为方便分析,对如下符号进行解释,即

$$E_\infty = \| \mathbf{y}_c - \mathbf{y}_e \|_\infty, \quad E_r = \| \mathbf{y}_c - \mathbf{y}_e \|_\infty / \| \mathbf{y}_e \|_\infty. \tag{24}$$

式(24)中: $\mathbf{y}_c, \mathbf{y}_e$ 分别为数值解和解析解的列向量; $\| \cdot \|_\infty$ 为向量的欧式范数.

2.1 算例 1

使用 Allen-Cahn 方程验证重心插值配点法的准确性. Allen-Cahn 方程的精确解为

$$u = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{x-st}{2\sqrt{2}\epsilon}\right) \right). \tag{25}$$

式(25)中: $s = 3/(\sqrt{2}\epsilon)$; x 的取值范围为 $(-2, 2)$; t 的取值范围为 $(0, 1]$; $\epsilon = 0.3$.

在节 1.6.2 重心插值配点法计算公式的基础上,选取 $x \in (-2, 2), t \in (0, 1]$ 区间段进行插值. 将 x, t 值离散化, $-2 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 2, 0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_M = 1$, 其中, N, M 为剖分节点数, $N = 20, 30, 35, M = 20, 30, 40, 45$. 利用重心 Lagrange 插值法及重心有理插值法进行计算,结果如表 1 所示.

表 1 不同插值配点法在区间 $x \in [-2, 2], t \in [0, 1]$ 的计算结果

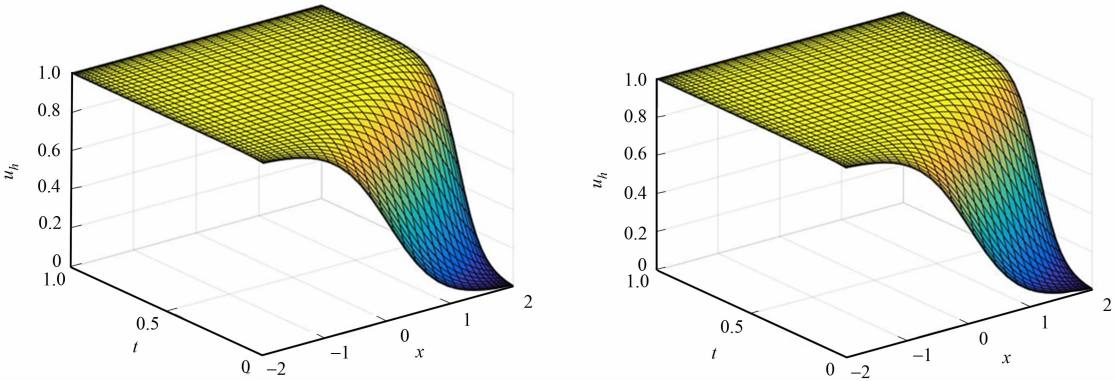
Tab. 1 Calculation results of different interpolation collocation method in interval $x \in [-2, 2], t \in [0, 1]$					
N	M	重心 Lagrange 插值配点法		重心有理插值配点法	
		E_∞	E_r	E_∞	E_r
20	20	$6.563\ 4 \times 10^{-4}$	$3.542\ 2 \times 10^{-5}$	$8.146\ 4 \times 10^{-4}$	$4.396\ 5 \times 10^{-5}$
30	20	$8.038\ 2 \times 10^{-4}$	$3.568\ 8 \times 10^{-5}$	$9.979\ 8 \times 10^{-4}$	$4.430\ 8 \times 10^{-5}$
30	30	$1.126\ 6 \times 10^{-5}$	$4.110\ 9 \times 10^{-7}$	$3.525\ 2 \times 10^{-5}$	$1.286\ 4 \times 10^{-6}$
30	40	$2.294\ 0 \times 10^{-7}$	$7.273\ 5 \times 10^{-9}$	$1.766\ 4 \times 10^{-6}$	$5.600\ 7 \times 10^{-8}$
35	45	$1.000\ 6 \times 10^{-9}$	$2.670\ 0 \times 10^{-11}$	$3.467\ 5 \times 10^{-7}$	$9.628\ 0 \times 10^{-9}$

由表 1 可知:在利用重心 Lagrange 插值配点法及重心有理插值配点法求解 Allen-Cahn 方程的过程当中,随着节点个数的增加,在区间 $x \in [-2, 2], t \in [0, 1]$ 上,重心 Lagrange 插值配点法的绝对值误差 E_∞ 的数量级从 10^{-4} 下降到 10^{-9} ,相对误差 E_r 的数量级从 10^{-5} 下降到 10^{-11} ,重心有理插值的绝对值误差 E_∞ 的数量级从 10^{-4} 下降到 10^{-7} ,相对误差 E_r 的数量级从 10^{-5} 下降到 10^{-9} .

综上,利用重心 Lagrange 插值配点法及重心有理插值配点法求解 Allen-Cahn 方程具有较高的精度,并且在剖分节点数量一样的情况下,采用重心 Lagrange 插值配点法得到的结果精度略高于重心有理插值配点法. 两个区间的数值解及误差分布图,分别如图 2, 3 所示. 图 2, 3 中: x 为空间自变量; t 为时间自变量; u_h 为数值解.

由图 2 可知:重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法的数值解图像均逼近于真实解,具有较高的精度.

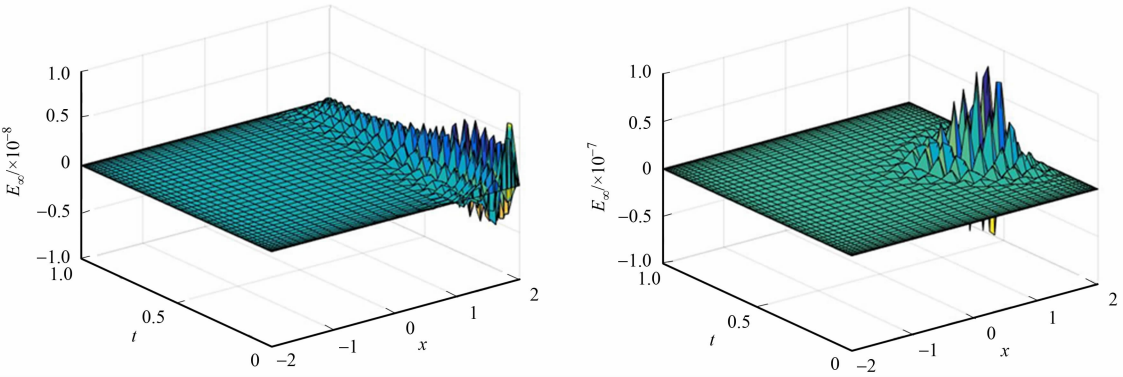
由图 3 可知:重心 Lagrange 插值配点法比重心有理插值配点法的精度高.



(a) 重心 Lagrange 插值配点法 (b) 重心有理插值配点法

图 2 不同插值配点法在区间 $x \in [-2, 2], t \in [0, 1]$ 数值解

Fig. 2 Numerical solution of different interpolation collocation method in interval $x \in [-2, 2], t \in [0, 1]$



(a) 重心 Lagrange 插值配点法 (b) 重心有理插值配点法

图 3 不同插值配点法在区间 $x \in [-2, 2], t \in [0, 1]$ 误差分布图

Fig. 3 Error distribution of different interpolation collocation method in interval $x \in [-2, 2], t \in [0, 1]$

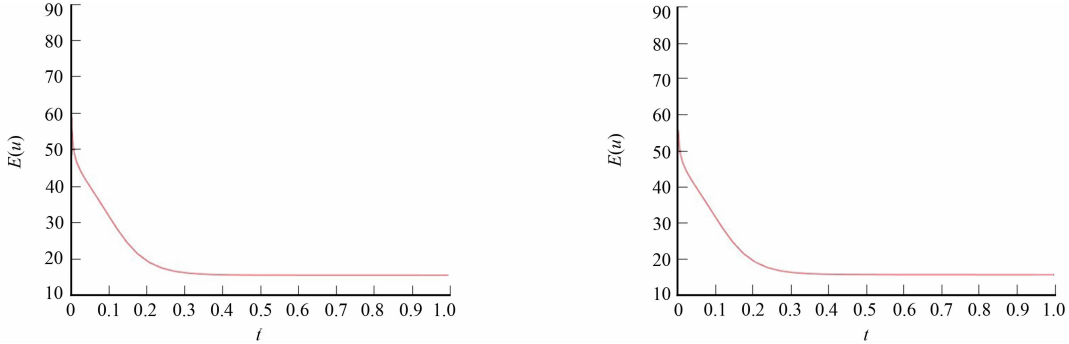
2.2 算例 2

定义离散能量函数 $E(u)$ 为

$$E^h(u^n) = \frac{h}{4\epsilon^2} \sum_{i=0}^N [(u_i^n)^2 - 1]^2 + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} [\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}]^2. \tag{26}$$

初值 $u^0 = \epsilon \cdot \sin(1.5\pi \cdot x)$, 取 Dirichlet 边界条件, 可得左边界值 $u_0 = 1$, 右边界值 $u_n = -1$, 且 $t \in [0, 2], x \in [-1, 1]$. 对 t, x 进行离散化, $x_1 < x_2 < \dots < x_N, t_1 < t_2 < \dots < t_M$, 其中, $N = 50, M = 25$. 此时, h 为相邻两个 x 离散节点的步长, Δt 为相邻两个 t 离散节点的步长.

当 $\epsilon = 0.10, \epsilon = 0.02$ 时, 重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法的运行结果, 如图 4~7



(a) 重心 Lagrange 插值配点法 (b) 重心有理插值配点法

图 4 不同插值配点法牛顿线性格式能量随时间的变化 ($\epsilon = 0.10$)

Fig. 4 Variation of energy of Newton linear scheme with different interpolation collocation method ($\epsilon = 0.10$)

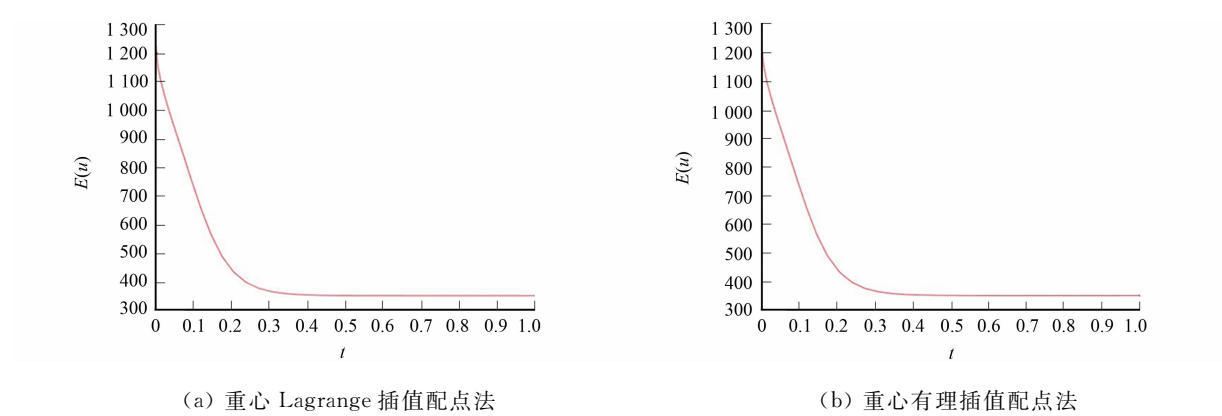


图 5 不同插值配点法牛顿线性格式能量随时间的变化($\epsilon=0.02$)

Fig. 5 Variation of energy of Newton linear scheme with different interpolation collocation method ($\epsilon=0.02$)

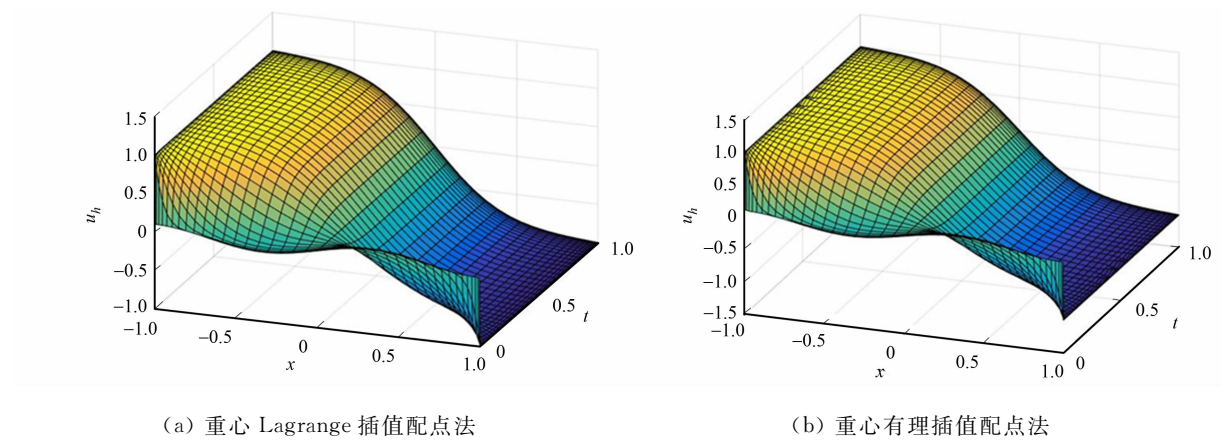


图 6 不同插值配点法牛顿线性格式数值解图像($\epsilon=0.10$)

Fig. 6 Numerical solution image of Newton linear format with different interpolation collocation method ($\epsilon=0.10$)

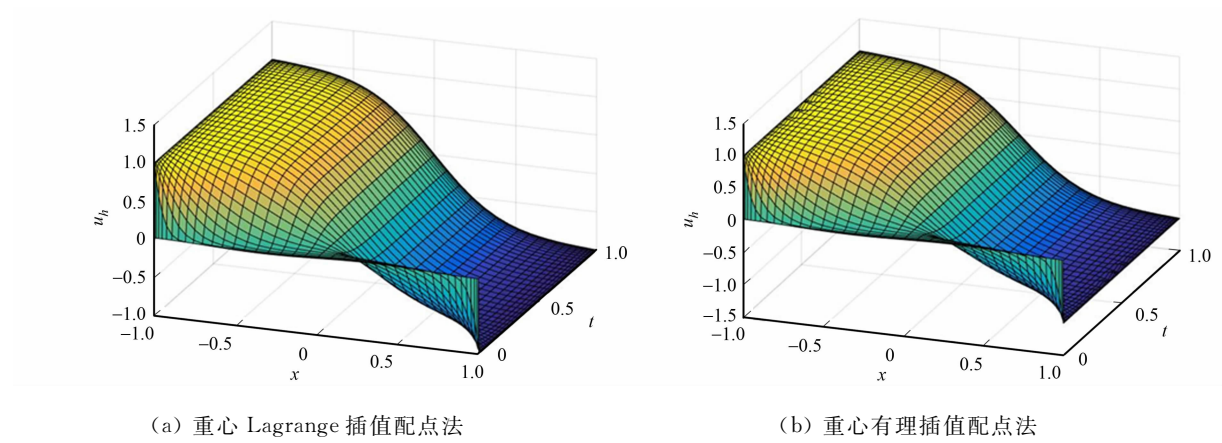


图 7 不同插值配点法牛顿线性格式数值解图像($\epsilon=0.02$)

Fig. 7 Numerical solution image of Newton linear format with different interpolation collocation method ($\epsilon=0.02$)

所示. 由图 4 可知: 当 $\epsilon=0.10$ 时, 能量函数 $E(u)$ 随着时间 t 的增加不断减少, 最后能量趋于一个稳定的状态. 由图 6 可知: 随着 x 的不断变大, 数值解的值从 1 开始不断向 -1 趋近. 比较图 4, 5 可知: 随着 ϵ 的变小, 趋于稳定状态时的能量值将会变大. 总的来说, 使用重心 Lagrange 插值配点法的数值解图像更加光滑, 插值效果略好于重心有理插值配点法.

3 结束语

利用重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法的牛顿线性迭代格式求解 Allen-Cahn 方程的数值解, 通过数值算例比较 Allen-Cahn 方程两个区间段内的数值解和误差, 并验证其数值解满足能

量递减规律. 通过第 1 个算例验证重心插值配点法的精确度, 经分析比较之后, 发现重心插值配点法具有数值稳定性好及近似度高的特点. 通过第 2 个数值算例, 发现能量函数递减的规律.

参考文献:

- [1] BENNEŠ M, CHALUPECKY V, MIKULA K. Geometrical image segmentation by the Allen-Cahn equation[J]. Applied Numerical Mathematics, 2004, 51(2/3): 187-205. DOI: 10. 1016/j. apnum. 2004. 05. 001.
- [2] FENG Xiaobing, PROHL A. Numerical analysis of the Allen-Cahn equation and approximation for mean curvature flows[J]. Numerische Mathematik, 2003, 94(1): 33-65. DOI: 10. 1007/s00211-002-0413-1.
- [3] WHEELER A A, BOETTINGER W J, MCFADDEN G B. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys[J]. Physical Review A, 1992, 45(10): 7424-7439. DOI: 10. 1103/PhysRevA. 45. 7424.
- [4] COHEN D S, MURRAY J D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population[J]. Journal of Mathematical Biology, 1981, 12(2): 237-249. DOI: 10. 1007/BF00276132.
- [5] HAZEWINDEL M, KAASHOEK J F, LEYNSE B. Pattern formation for a one dimensional evolution equation based on Thom's river basin model[J]. Mathematics and Its Applications, 1986, 30: 23-46. DOI: 10. 1007/978-94-009-4718-4. 4.
- [6] CHEN Xinfu, ELLIOTT C, GARDINER A, *et al.* Convergence of numerical solutions to the Allen-Cahn equation [J]. Appl Anal, 1998, 69(1): 47-56. DOI: 10. 1080/00036819808840645.
- [7] ZHAI Shuying, FENG Xinlong, HE Yinnian. Numerical simulation of the three dimensional Allen-Cahn equation by high-order compact ADI method[J]. Comput Phys Commun, 2014, 185(10): 2449-2455. DOI: 10. 1016/j. cpc. 2014. 05. 017.
- [8] FENG Xiaobing, LI Yukun. Analysis of symmetric interior penalty discontinuous Galerkin methods for the Allen-Cahn equation and the mean curvature flow[J]. Ima Journal of Numerical Analysis, 2014, 35(4): 1622-1651. DOI: 10. 1093/imanum/dru058.
- [9] ZHANG Jian, DU Qiang. Numerical studies of discrete approximations to the Allen-Cahn equation in the sharp interface limit[J]. SIAM J Sci Comput, 2009, 31(4): 3042-3063. DOI: 10. 1137/080738398.
- [10] FENG Xinlong, TANG Tao, YANG Jiang. Long time numerical simulations for phase-field problems using p -adaptive spectral deferred correction methods[J]. SIAM J Sci Comput, 2015, 37: A271-A294. DOI: 10. 1137/130928662.
- [11] WENG Zhifeng, TANG Longkun. Analysis of the operator splitting scheme for the Allen-Cahn equation[J]. Journal Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2016, 70(5): 472-483. DOI: 10. 1080/10407790. 2016. 1215714.
- [12] LI Yibao, LEE H G, JEONG D, *et al.* An unconditionally stable hybrid numerical method for solving the Allen-Cahn equation[J]. Comput Math Appl, 2010, 60(6): 1591-1606. DOI: 10. 1016/j. camwa. 2010. 06. 041.
- [13] LEE H G, LEE J Y. A semi-analytical Fourier spectral method for the Allen-Cahn equation[J]. Comput Math Appl, 2014, 68(3): 174-184. DOI: 10. 1016/j. camwa. 2014. 05. 015.
- [14] LEE H G, LEE J Y. A second order operator splitting method for Allen-Cahn type equations with nonlinear source terms[J]. Physica A, 2015, 432: 24-34. DOI: 10. 1016/j. physa. 2015. 03. 012.
- [15] 庄清渠, 王金平. 四阶常微分方程的 Birkhoff 配点法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2018, 39(2): 306-311. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201707005.
- [16] 李淑萍, 王兆清. 重心插值配点法求解初值问题[J]. 山东建筑大学学报, 2007, 22(6): 481-485. DOI: 10. 3969/j. issn. 1673-7644. 2007. 06. 003.

(编辑: 李宝川 责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)