

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202204025



# 采用模糊扩张状态观测器的四旋翼 无人机滑模轨迹跟踪控制

林哲, 李平

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 针对四旋翼无人机(UAV)的轨迹跟踪控制存在外界未知扰动的问题,提出一种基于模糊扩张状态观测器的非奇异快速终端滑模控制算法。首先,根据双闭环控制结构分别对姿态内环、位置外环引入模糊扩张状态观测器,利用该观测器对系统所受到外部总扰动进行在线估计。然后,根据模糊扩张状态观测器的观测值,设计非奇异快速终端滑模控制器,保证四旋翼无人机的状态变量可在有限时间内收敛于期望轨迹。最后,根据李亚普诺夫理论,得出四旋翼无人机系统的闭环稳定性,并通过仿真对比实验验证该控制算法的优越性。结果表明:所提的控制算法可以提高跟踪性能,并有效增强系统的抗外界干扰能力。

**关键词:** 四旋翼无人机; 轨迹跟踪控制; 模糊扩张状态观测器; 非奇异快速终端滑模控制

**中图分类号:** V 279; TP 273.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2023)02-0141-09

## Sliding Mode Trajectory Tracking Control for Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle Using Fuzzy Extended State Observer

LIN Zhe, LI Ping

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** A nonsingular fast terminal sliding mode control algorithm based on fuzzy extended state observer is proposed to solve the problem of unknown disturbances in the trajectory tracking control of a quadrotor unmanned aerial vehicle (UAV). Firstly, according to the double closed-loop control structure, fuzzy extended state observers are introduced into the inner attitude loop and the outer position loop respectively, and the observer is used to estimate the total external disturbance of the system on-line. Then, a nonsingular fast terminal sliding mode controller is designed based on the observed value of the fuzzy extended state observer to ensure that the state variables of the quadrotor UAV can converge to the desired trajectory in finite time. Finally, the closed-loop stability of the quadrotor UAV system is derived based on Lyapunov theory, and the superiority of the control method is verified through simulation and comparison experiments. The results show that the proposed control algorithm can improve the tracking performance and effectively enhance the system's resistance to external disturbances.

**Keywords:** quadrotor unmanned aerial vehicle; trajectory tracking control; fuzzy extended state observer; nonsingular fast terminal sliding mode control

**收稿日期:** 2022-03-29

**通信作者:** 李平(1981-),女,副教授,博士,主要从事鲁棒控制及非线性系统的研究. E-mail: pingping\_1213@163.com.

**基金项目:** 福建省科技重大项目(2020HZ02014);福建省本科高校教育教学改革研究项目(FBJG20210239);华侨大学研究生教育教学改革研究资助项目(20YJG009)

近年来,无人机(UAV)在救援、军事、摄影,环境保护等领域得到了广泛的应用<sup>[1]</sup>.相较于传统无人机,四旋翼具有结构简单、灵活性强、携带方便等优点<sup>[2-4]</sup>,然而,四旋翼是一个强耦合、非线性的欠驱动系统,这使四旋翼轨迹跟踪问题面临诸多方面的挑战.因此,如何实现控制四旋翼稳定跟踪期望轨迹,成为一个热门研究课题.

为了解决上述控制问题,许多控制策略被应用于轨迹跟踪问题中,其中,比例-积分-微分(PID)控制<sup>[5]</sup>作为一种经典且常用的控制技术,已经在四旋翼控制方案中得到广泛的应用,但是,由于四旋翼模型本身的特性和气动效应使PID控制处理外部干扰能力受限<sup>[6]</sup>.文献[7-8]分别采用反步法、反馈线性化实现四旋翼轨迹跟踪,然而,反步法为了保证其鲁棒跟踪性能,必须依赖被控对象的全部模型信息,而反馈线性化在传感器噪声和模型不确定的情况下,鲁棒性较差. Okyere 等<sup>[9]</sup>使用线性二次型调节器(LQR)实现四旋翼的稳定控制,并且能满足多个性能指标的要求. Yang 等<sup>[10]</sup>使用自抗扰技术,在双闭环的控制策略下,对内、外环分别使用自抗扰控制和比例-微分控制,并对内、外环的稳定性进行讨论. 郑佳静等<sup>[11]</sup>利用滑模观测器重构故障信息,实时估计外界扰动,保证四旋翼无人机稳定跟踪既定轨迹.

滑模控制作为典型的非线性控制技术,鲁棒性高,在四旋翼控制方面有大量的研究成果.传统滑模控制<sup>[12]</sup>虽然能保证四旋翼在运行过程中有较强的抗扰性能,但是在到达滑模面后并不能保证有限时间内收敛至平衡点.因此,终端滑模控制<sup>[13]</sup>以缩短到达平衡点的时间(有限时间收敛)为目的.然而,终端滑模控制仍有奇异性的问题, Hou 等<sup>[14]</sup>使用非奇异终端滑模控制解决了该问题,而 Hua 等<sup>[15]</sup>针对姿态内环,采用非奇异快速终端滑模算法加快收敛速率. Mofid 等<sup>[16]</sup>将自适应技术与滑模控制相结合,利用自适应估计扰动的上界,从而达到抗扰的效果. Li 等<sup>[17]</sup>提出基于径向基函数(RBF)神经网络和积分滑模控制的控制策略,通过对扰动和不确定性进行补偿,可以实现更快的响应时间和零稳态误差. Maqsood 等<sup>[18]</sup>结合非线性扰动观测器,将观测器的估计值返回给滑模控制器,从而抵消外部扰动.

本文针对四旋翼无人机轨迹跟踪存在外部扰动干扰的问题,通过双闭环控制结构,设计基于模糊扩张状态观测器的非奇异快速终端滑模轨迹跟踪控制方案.

## 1 四旋翼无人机模型

通过地面坐标系  $O_E$  和机体坐标系  $O_B$  建立四旋翼无人机的动力学模型,用  $x, y, z$  表示四旋翼在空间中重心的位置,且使用  $\phi, \theta, \psi$  分别表示四旋翼的横滚角、俯仰角和偏航角.此外,通过如下 3 个假设,最终得到四旋翼的模型.四旋翼无人机结构模型,如图 1 所示.图 1 中:  $F_1 \sim F_4$  为 4 个螺旋桨产生的升力;  $\omega_1 \sim \omega_4$  为 4 个螺旋桨的转子角速度.

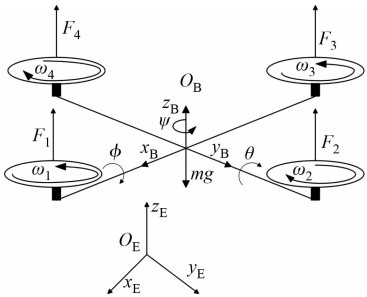


图 1 四旋翼无人机结构模型  
Fig. 1 Structural model of quadrotor UAV

**假设 1**<sup>[19-20]</sup> 四旋翼被视为一个刚体,并且结构对称.四旋翼的几何中心与重心重合.

**假设 2**<sup>[19-20]</sup> 在四旋翼的飞行过程中,系统受到的扰动是有界的,即  $d_i \leq D(i=1,2,\cdots,6)$ .

**假设 3**<sup>[19-20]</sup> 四旋翼的姿态角是有界的,即  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, -\pi \leq \psi \leq \pi$ .

基于上述假设,利用牛顿第二定律及牛顿-欧拉方程,最终得到的动力学模型为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{u_1}{m} (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) - \frac{k_1}{m} \dot{x} + d_1, \\ \ddot{y} &= \frac{u_1}{m} (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) - \frac{k_2}{m} \dot{y} + d_2, \\ \ddot{z} &= \frac{u_1}{m} (\cos \phi \cos \theta) - \frac{k_3}{m} \dot{z} - g + d_3, \\ \ddot{\phi} &= \dot{\theta} \dot{\psi} \frac{I_y - I_z}{I_x} + J_r \dot{\theta} \omega_r + \frac{l}{I_x} u_2 - \frac{k_4 l}{I_x} \dot{\phi} + d_4, \\ \ddot{\theta} &= \dot{\phi} \dot{\psi} \frac{I_z - I_x}{I_y} - J_r \dot{\phi} \omega_r + \frac{l}{I_y} u_3 - \frac{k_5 l}{I_y} \dot{\theta} + d_5, \\ \ddot{\psi} &= \dot{\theta} \dot{\phi} \frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{u_4}{I_z} - \frac{k_6}{I_z} \dot{\psi} + d_6. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中:  $u_1 \sim u_4$  为四旋翼的控制输入;  $I_x, I_y, I_z$  分别为四旋翼绕机体坐标系上三轴的转动惯量;  $l$  为螺旋桨到四旋翼中心的距离;  $g$  为重力加速度;  $m$  为四旋翼的质量;  $k_i (i=1, 2, \dots, 6)$  为气动摩擦系数;  $J_r$  为螺旋桨的转动惯量;  $\omega_r$  为螺旋桨整体的角速度,  $\omega_r = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4$ .

## 2 四旋翼无人机的控制器设计

控制策略中充分考虑了外部扰动对系统的影响, 四旋翼无人机控制结构, 如图 2 所示.

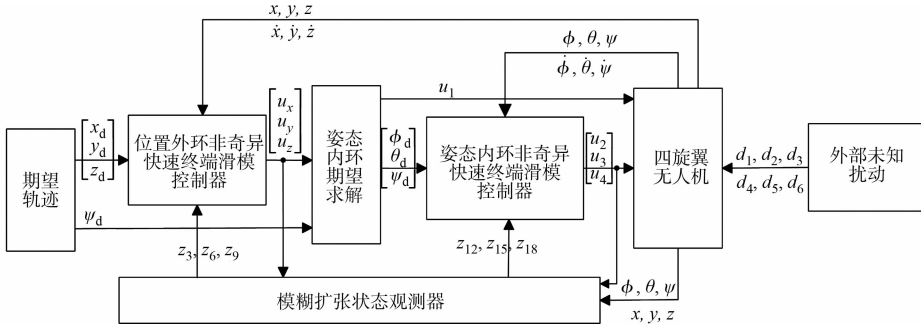


图 2 四旋翼无人机控制结构图

Fig. 2 Control structure diagram of quadrotor UAV

为了解决四旋翼欠驱动的特性, 需要通过位置外环的控制输入得到横滚角和俯仰角的期望值  $[\phi_d, \theta_d]$ ,  $\phi_d, \theta_d$  表达式分别为

$$\phi_d = \arctan\left(\frac{\cos \theta_d (u_x \sin \phi_d - u_y \cos \phi_d)}{u_z}\right), \quad \theta_d = \arctan\left(\frac{u_x \cos \phi_d + u_y \sin \phi_d}{u_z}\right). \quad (2)$$

式(2)中:  $\phi_d$  为偏航角的期望值;  $u_x, u_y, u_z$  为虚拟控制律,  $u_x = u_1 (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)$ ,  $u_y = u_1 \times (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)$ ,  $u_z = u_1 (\cos \phi \cos \theta)$ ,  $u_1 = (\cos \phi \cos \theta) / u_z$ .

分别对位置外环、姿态内环设计非奇异快速终端滑模控制器, 以保证状态变量的有限时间收敛, 并利用模糊扩张状态观测器来抵消外部未知扰动对系统的影响.

### 2.1 模糊扩张状态观测器的设计

首先, 对模糊扩张状态观测器的设计方式进行阐述. 由于姿态内环为全驱动系统, 因此, 对姿态内环进行观测器设计, 将姿态内环的动力学模型改写为状态空间的形式, 即

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_7 &= x_8, & \dot{x}_8 &= x_{10} x_{12} \frac{I_y - I_z}{I_x} + J_r \frac{x_{10} \omega_r}{I_x} + \frac{l}{I_x} u_2 - \frac{k_4 l}{I_x} x_8 + d_4, \\ \dot{x}_9 &= x_{10}, & \dot{x}_{10} &= x_8 x_{12} \frac{I_z - I_x}{I_y} - J_r \frac{x_8 \omega_r}{I_y} + \frac{l}{I_y} u_3 - \frac{k_5 l}{I_y} x_{10} + d_5, \\ \dot{x}_{11} &= x_{12}, & \dot{x}_{12} &= x_8 x_{10} \frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{u_4}{I_z} - \frac{k_6 l}{I_z} x_{12} + d_6. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)中:  $[x_7, x_9, x_{11}]^T = [\phi, \theta, \psi]^T$ ;  $[x_8, x_{10}, x_{12}]^T = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ .

为了方便阐述, 选择  $\phi$  姿态子系统设计模糊扩张状态观测器, 从而估计外部未知函数及未知函数的总值. 模糊扩张状态观测器采用线性扩张状态观测器的结构, 首先, 将式(3)改写为

$$\dot{x}_7 = x_8, \quad \dot{x}_8 = D_4 + l u_2 / I_x, \quad \dot{D}_4 = \varphi_4. \quad (4)$$

式(4)中:  $D_4$  为总扰动,  $D_4 = x_{10} x_{12} \frac{I_y - I_z}{I_x} + J_r \frac{x_{10} \omega_r}{I_x} - \frac{k_4 l}{I_x} x_8 + d_4$ .

然后, 模糊扩张状态观测器为

$$\dot{z}_{10} = z_{11} - \eta_{10} e, \quad \dot{z}_{11} = z_{12} + l u_2 / I_x - \eta_{11} e, \quad \dot{z}_{12} = -\eta_{12} e, \quad e = z_{10} - \phi. \quad (5)$$

式(5)中:  $z_{10}, z_{11}, z_{12}$  是  $x_7, x_8, D_4$  的估计值;  $\eta_{10}, \eta_{11}, \eta_{12}$  为观测器的系数.

为了选择合适的  $\eta_{10}, \eta_{11}, \eta_{12}$ , 一般来说, 使用极点配置法确定参数, 当线性扩张状态观测器的极点为  $-\omega_0$  时, 该方法可以写为

$$(s + \omega_0)^3 = s^3 + \eta_{10} s^2 + \eta_{11} s + \eta_{12}. \quad (6)$$

式(6)中: $\omega_0$  为扩张状态观测器的带宽.

由于  $\omega_0$  对观测器的性能有较大的影响,其过大或过小都会导致观测器性能降低.为了在性能指标取得合理的平衡,需要适当选择观测器带宽.然而,线性扩张状态观测器通常将带宽设置为一个常数,这不利于获得更好的控制性能.因此,考虑使用单输入单输出的模糊系统来在线调节观测器的带宽,通过使用  $e$  和  $\dot{e}$  的线性组合作为模糊系统的输入,期望带宽  $\omega_0^*$  则是模糊系统的输出.

模糊系统的输入隶属度函数、输出隶属度函数,分别如图 3,4 所示.图 3 中为模糊输入端分配 5 个隶属函数,分别命名为正大(PL)、正中(PM)、小(S)、负中(NM)和负大(NL).图 4 中为模糊输出端分配 3 个隶属函数,分别命名为大(L)、中(M)、小(S).根据文献[21],对模糊系统引入如下 5 个规则.

- 规则 1 如果  $\lambda_1 e + \lambda_2 \dot{e}$  为 NL,那么,  $\omega_0$  为 S.其中,  $\lambda_1, \lambda_2$  为比例系数.
- 规则 2 如果  $\lambda_1 e + \lambda_2 \dot{e}$  为 NM,那么,  $\omega_0$  为 M.
- 规则 3 如果  $\lambda_1 e + \lambda_2 \dot{e}$  为 S,那么,  $\omega_0$  为 L.
- 规则 4 如果  $\lambda_1 e + \lambda_2 \dot{e}$  为 PM,那么,  $\omega_0$  为 M.
- 规则 5 如果  $\lambda_1 e + \lambda_2 \dot{e}$  为 PL,那么,  $\omega_0$  为 S.

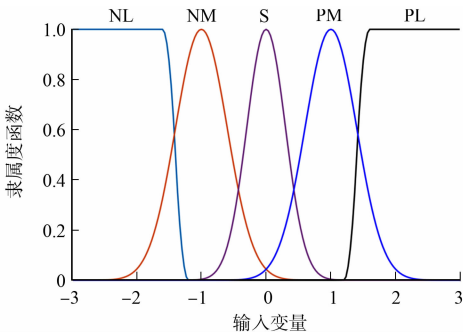


图 3 模糊系统的输入隶属度函数

Fig. 3 Input membership functions of fuzzy system

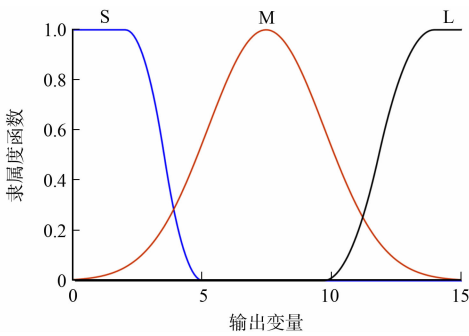


图 4 模糊系统的输出隶属度函数

Fig. 4 Output membership functions of fuzzy system

接着,使用解模糊化式(7)得到模糊系统的输出,即期望带宽  $\omega_0^*$  表示为

$$\omega_0^* = \int \omega_0 \mu(\omega_0) d\omega_0 / \int \mu(\omega_0) d\omega_0.$$

(7)

对于  $\theta, \psi$  子系统也可以使用相同的方法得到相应的模糊扩张状态观测器.

假设 4  $\varphi_i$  是有界的,即  $\varphi_i \leq \sigma, \sigma$  为正常数.

定理 1 当四旋翼姿态控制系统中使用模糊扩张状态观测器时,在假设 4 的前提下,观测器的估计误差最终将会收敛至一个有界球内.

证明:对于  $\phi$  子系统,定义  $\mathbf{X}=[x_7 \quad x_8 \quad D]^T, \mathbf{Z}=[z_{10} \quad z_{11} \quad z_{12}]^T$ ,那么,观测器的误差方程为

$$\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{A}\mathbf{E}+\mathbf{H}\times(-\varphi_i).$$

(8)

式(8)中:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\eta_{10} & 1 & 0 \\ -\eta_{11} & 0 & 1 \\ -\eta_{12} & 0 & 0\end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}=\mathbf{Z}-\mathbf{X}.$$

(9)

根据极点配置法计算  $\eta_{10}, \eta_{11}, \eta_{12}$ ,并从模糊系统中获得扩张状态观测器(ESO)的期望带宽.考虑 Lyapunov 函数  $V$ ,即

$$V=\mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E}.$$

(10)

式(10)中: $\mathbf{P}$  为正定矩阵.

那么,式(10)的导数为

$$\dot{V}=\mathbf{E}^T(\mathbf{A}^T \mathbf{P}+\mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{E}+2 \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \times(-\varphi_i).$$

(11)

由于  $\mathbf{A}$  为 Hurwitz,因此,  $\mathbf{A}^T \mathbf{P}+\mathbf{P} \mathbf{A}=-\lambda \mathbf{I}, \lambda$  为正常数,  $\mathbf{I}$  为单位对角矩阵,经过一些简单的计算可以得到

$$\dot{V} \leq -\lambda \|E\|^2 + 2\sigma\lambda_{\max}(P) \|E\| = -\|E\|(\lambda \|E\| - 2\sigma\lambda_{\max}(P)). \quad (12)$$

式(12)中:  $\lambda_{\max}$  为矩阵的最大特征值。

从式(12)可以发现, 当  $\|E\| > 2\sigma\lambda_{\max}(P)/\lambda$  时,  $\dot{V}$  是负定的, 因此,  $E$  最终会收敛至  $2\sigma\lambda_{\max}(P)/\lambda$  的球内。同样, 可以使用相同的证明方式在  $\theta, \psi$  子系统中得到相同的结论。

**注释 1** 在  $\theta, \psi$  子系统中, 使用  $z_{13}, z_{14}, z_{15}$  估计  $x_9, x_{10}, D_5, D_5 = x_{12}x_8 \frac{I_z - I_x}{I_y} - J_r \frac{x_8 \omega_r}{I_y} - \frac{k_5 l}{I_y} x_{10} + d_5$ ; 使用  $z_{16}, z_{17}, z_{18}$  估计  $x_{11}, x_{12}, D_6, D_6 = x_8 x_{10} \frac{I_x - I_y}{I_z} - \frac{k_6 l}{I_z} x_{12} + d_6$ 。

## 2.2 姿态内环非奇异快速终端滑模控制器的设计

基于模糊扩张状态观测器的滑模控制器, 将用于保证四旋翼的状态变量在有外部扰动情况快速收敛至期望值。首先, 重新考虑式(4)并定义姿态角的跟踪误差  $e_7, e_9, e_{11}$  和姿态角速度的跟踪误差  $e_8, e_{10}, e_{12}$ , 即

$$\left. \begin{aligned} e_7 &= x_7 - \phi_d, & e_9 &= x_9 - \theta_d, & e_{11} &= x_{11} - \psi_d, \\ e_8 &= x_8 - \dot{\phi}_d, & e_{10} &= x_{10} - \dot{\theta}_d, & e_{12} &= x_{12} - \dot{\psi}_d. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

根据式(13)设计非奇异快速终端滑模面  $s_m (m=7, 9, 11)^{[22]}$ , 即

$$s_m = e_m + b_m |e_m|^{\alpha_m} \text{sign}(e_m) + b_{m+1} |e_{m+1}|^{\beta_m} \text{sign}(e_{m+1}). \quad (14)$$

式(14)中:  $b_m, b_{m+1}, \beta_m, \alpha_m$  为正常数,  $m=7, 9, 11$ , 为了解决奇异问题, 需满足  $\alpha_m > \beta_m, 1 < \beta_m < 2$ 。

对滑模面进行求导, 并采用趋近律  $\dot{s}_m = -c_m s_m - \tau_m \text{sign}(\tau_m) (m=1, 3, 5), c_m > 0, \tau_m > 0$  来提高控制器的鲁棒性, 并且抵消估计误差。从而, 得到姿态内环的控制输入为

$$u_2 = \frac{I_x}{l} \left( -\frac{1}{b_8 \beta_7} |e_8|^{2-\beta_7} (1 + b_7 \alpha_7 |e_7|^{\alpha_7-1}) \text{sign}(e_8) - c_7 s_7 + \ddot{\phi}_d - \tau_7 \text{sign}(s_7) - z_{12} \right), \quad (15)$$

$$u_3 = \frac{I_y}{l} \left( -\frac{1}{b_{10} \beta_9} |e_{10}|^{2-\beta_9} (1 + b_9 \alpha_9 |e_9|^{\alpha_9-1}) \text{sign}(e_{10}) - c_9 s_9 + \ddot{\theta}_d - \tau_9 \text{sign}(s_9) - z_{15} \right), \quad (16)$$

$$u_4 = I_z \left( -\frac{1}{b_{12} \beta_{11}} |e_{12}|^{2-\beta_{11}} (1 + b_{11} \alpha_{11} |e_{11}|^{\alpha_{11}-1}) \text{sign}(e_{12}) - c_{11} s_{11} + \ddot{\psi}_d - \tau_{11} \text{sign}(s_{11}) - z_{18} \right). \quad (17)$$

式(15)~(17)中:  $z_{12}, z_{15}, z_{18}$  为姿态内环中模糊扩张状态观测器估计的总扰动。

**定理 2** 对于姿态子系统式(3)及滑模面式(14), 使用控制输入式(15)~(17), 姿态子系统的状态跟踪误差变量将在有限时间内收敛至滑模面上, 此外, 跟踪误差将会在有限时间内收敛至 0。

证明: 为了方便阐述, 选取  $\phi$  子系统进行证明, 对  $\phi$  子系统, 选取 Lyapunov 函数为

$$V_7 = \frac{1}{2} s_7^2. \quad (18)$$

对式(18)进行求导, 有

$$\dot{V}_7 = \dot{s}_7 s_7 = s_7 (e_8 + \alpha_7 b_7 |e_7|^{\alpha_7-1} e_8 + \beta_7 b_8 |e_8|^{\beta_7-1} \dot{e}_8). \quad (19)$$

将  $\dot{e}_8 = \dot{x}_8 - \ddot{\phi}_d$  代入式(19), 可以得到

$$\dot{V}_7 = \dot{s}_7 s_7 = s_7 \left( e_8 + \alpha_7 b_7 |e_7|^{\alpha_7-1} e_8 + \beta_7 b_8 |e_8|^{\beta_7-1} \left( D_4 - \ddot{\phi}_d + \frac{l u_2}{I_x} \right) \right). \quad (20)$$

代入控制输入式(15), 根据定理 1, 估计误差是有界的, 设  $|D_4 - z_{12}| \leq \gamma_7 < \tau_7, \tau_7 = \rho_7 + \gamma_7$ , 则有

$$\dot{V}_7 = \dot{s}_7 s_7 = b_8 \beta_7 |e_8|^{\beta_7-1} (D_4 - z_{12} - c_7 s_7 - \tau_7 \text{sign}(s_7)) s_7 \leq b_8 \beta_7 |e_8|^{\beta_7-1} (-c_7 s_7^2 - \rho_7 |s_7|) \leq 0. \quad (21)$$

重写式(21)为

$$\dot{V}_7 \leq -2b_8 \beta_7 |e_8|^{\beta_7-1} V_7 - \sqrt{2} b_8 \beta_7 |e_8|^{\beta_7-1} V_7^{1/2} = -\kappa_7 V_7 - \kappa_8 V_7^{1/2}. \quad (22)$$

式(22)中:  $\kappa_7 = b_8 \beta_7 |e_8|^{\beta_7-1}; \kappa_8 = \sqrt{2} b_8 \beta_7 |e_8|^{\beta_7-1}$ 。

当  $V_7 \geq 0, e_8 \neq 0$  时, 系统的状态变量将在有限时间内收敛至滑模面上。

考虑  $e_8 = 0$  的情况, 在式  $\dot{e}_8 = \dot{x}_8 - \ddot{\phi}_d$  中, 代入式(15), 那么, 有

$$\dot{e}_8 = x_{10} x_{12} \frac{I_y - I_z}{I_x} + J_r \frac{x_{10} \omega_r}{I_x} + \frac{l}{I_x} u_2 - \frac{k_4 l}{I_x} x_8 + d_4 - \ddot{\phi}_d = D_4 - z_{12} - c_7 s_7 - \tau_7 \text{sign}(s_7). \quad (23)$$

在式(23)中,当  $s_7 > 0$  时,  $\dot{e}_8 < -\rho_7$ ; 当  $s_7 < 0$  时,  $\dot{e}_8 > \rho_7$ , 表明系统的状态变量不会停留在点  $(e_7 \neq 0, e_8 = 0)$  上, 因此, 在平面上的任何一个点都可以在有限时间内收敛到滑模面上. 接着, 跟踪误差也将会在有限时间内收敛至 0, 说明如下.

当滑模面  $s_7 = 0$  时, 可以将其写为  $e_7 + b_7 |e_7|^{\alpha_7} \text{sign}(e_7) + b_8 |e_8|^{\beta_7} \text{sign}(e_8) = 0$ , 那么, 从  $e_7(t_s) \neq 0$  到  $e_7(t_s + t_p) = 0$  的收敛时间<sup>[23]</sup>为

$$t_p = \frac{\beta_7 |e_7(t_s)|^{1-1/\beta_7}}{b_7(\beta_7-1)} \cdot F\left(\frac{1}{\beta_7}, \frac{\beta_7-1}{(\alpha_7-1)\beta_7}; 1 + \frac{\beta_7-1}{(\alpha_7-1)\beta_7}; -b_7 |e_7(t_s)|^{\alpha_7-1}\right). \quad (24)$$

式(24)中:  $F(\cdot)$  为高斯超几何函数.

以上证明过程也可以应用到  $\theta, \phi$  子系统中. 最终得到结论, 即系统的跟踪误差可以在避免奇异问题的情况下在有限时间内快速收敛至 0.

证明完毕.

### 2.3 位置外环控制器的设计

根据所提方案设计位置外环的控制器, 同样考虑位置子系统状态空间形式, 即

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= \frac{u_x}{m} - \frac{k_1}{m}x_8 + d_1, & \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{u_y}{m} - \frac{k_2}{m}x_4 + d_2, & \dot{x}_5 &= x_6, & \dot{x}_6 &= \frac{u_z}{m} - \frac{k_3}{I_z}x_6 - g + d_3. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(25)中:  $[x_1, x_3, x_5]^T = [x, y, z]^T$ ;  $[x_2, x_4, x_6]^T = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ .

首先, 设计观测器, 由于四旋翼欠驱动的特性, 不能直接套用节 2.1 中观测器的形式, 而是使用虚拟控制律作为观测器的输入, 以位置  $x$  子系统为例, 即

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = D_1 + \frac{u_x}{m}, \quad \dot{D}_1 = \varphi_1. \quad (26)$$

式(26)中:  $D_1$  为所考虑的总扰动,  $D_1 = -\frac{k_1}{m}\dot{x} + d_1$ .

$$\dot{z}_1 = z_2 - \eta_1 e_x, \quad \dot{z}_2 = z_3 + \frac{u_x}{m} - \eta_2 e_x, \quad \dot{z}_3 = -\eta_3 e_x, \quad e_x = z_1 - x. \quad (27)$$

式(27)中:  $z_1, z_2, z_3$  是  $x_1, x_2, D_1$  估计值.

同样, 使用节 2.1 的方法获取合适的  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , 从而快速估计系统受到的总扰动.

**注释 2** 在  $y, z$  子系统中, 可以采用相同的方法设计观测器, 并使用  $z_4, z_5, z_6$  估计  $x_3, x_4, D_2, D_2 = -\frac{k_2}{m}x_4 + d_2$ ;  $z_7, z_8, z_9$  估计  $x_5, x_6, D_3, D_3 = -\frac{k_3}{I_z}x_6 - g + d_3$ .

定义位置外环的跟踪误差  $e_1, e_3, e_5$  和速度跟踪误差  $e_2, e_4, e_6$  分别为

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_d, & e_3 &= x_3 - y_d, & e_5 &= x_5 - z_d, \\ e_2 &= x_2 - \dot{x}_d, & e_4 &= x_4 - \dot{y}_d, & e_6 &= x_6 - \dot{z}_d. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式(28)中:  $[x_d, y_d, z_d]$  为位置外环的期望值.

根据式(28)定义得到位置外环的滑模面  $s_j (j=1, 3, 5)$  为

$$s_j = e_j + b_j |e_j|^{\alpha_j} \text{sign}(e_j) + b_{j+1} |e_{j+1}|^{\beta_j} \text{sign}(e_{j+1}). \quad (29)$$

式(29)中:  $b_j, b_{j+1}, \beta_j, \alpha_j (j=1, 3, 5)$  为正常数, 满足  $\alpha_j > \beta_j, 1 < \beta_j < 2$ .

那么, 位置外环的控制输入则为

$$u_x = m \left( -\frac{1}{b_2 \beta_1} |e_2|^{2-\beta_1} (1 + b_1 \alpha_1 |e_1|^{\alpha_1-1}) \text{sign}(e_2) - c_1 s_1 + \ddot{x}_d - \tau_1 \text{sign}(s_1) - z_3 \right), \quad (30)$$

$$u_y = m \left( -\frac{1}{b_4 \beta_3} |e_4|^{2-\beta_3} (1 + b_3 \alpha_3 |e_3|^{\alpha_3-1}) \text{sign}(e_4) - c_3 s_3 + \ddot{y}_d - \tau_3 \text{sign}(s_3) - z_6 \right), \quad (31)$$

$$u_z = m \left( -\frac{1}{b_6 \beta_5} |e_6|^{2-\beta_5} (1 + b_5 \alpha_5 |e_5|^{\alpha_5-1}) \text{sign}(e_6) - c_5 s_5 + \ddot{z}_d - \tau_5 \text{sign}(s_5) - z_9 \right). \quad (32)$$

式(30)~(32)中:  $z_3, z_6, z_9$  为位置外环中模糊扩张状态观测器估计的总扰动;  $c_j > 0, \tau_j > 0 (j=1, 3, 5)$ .

**定理 3** 对于位置子系统及滑模面式(29), 使用控制输入式(30)~(32), 位置子系统的状态变量将

在有限时间内收敛至滑模面上,此外,跟踪误差将会在有限时间内收敛至 0.

证明:与定理 2 类似,故省略.

3 仿真结果及分析

在 MATLAB/Simulink 平台上进行仿真实验,验证控制策略的有效性.四旋翼无人机模型参数,如表 1 所示.控制器参数,如表 2 所示.

在仿真实验中,期望轨迹分别为  $x_d=2\sin(0.1t), y_d=2\cos(0.1t), z_d=1, \psi_d=0.2, t$  为仿真的运行时间.

首先,关注观测器的性能,考虑实际情况,在四旋翼运行过程中引入不同的阶跃扰动, $d_1=10(t-10), d_2=10(t-10), d_3=2, d_4=1, d_5=1, d_6=8$ .即当位置外环  $x, y$  在  $t=10\text{ s}$  时,引入阶跃扰动.

表 2 控制器参数  
Tab.2 Parameters of controller

参数	数值	参数	数值	参数	数值
$c_1, c_2, c_3$	5, 4, 5	$b_7, b_9, b_{11}$	8.74, 8.74, 8.74	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$	1.7, 1.7, 1.7
$c_4, c_5, c_6$	7, 2, 2	$b_8, b_{10}, b_{12}$	0.483 8, 0.483 8, 0.483 8	$\alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}$	1.197, 1.197, 1.197
$b_1, b_3, b_5$	2.1, 2.1, 2.1	$\beta_1, \beta_3, \beta_5$	5/3, 5/3, 5/3	$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6$	1, 1, 1, 1, 1, 1
$b_2, b_4, b_6$	0.08, 0.08, 0.08	$\beta_7, \beta_9, \beta_{11}$	1.008 5, 1.008 5, 1.008 5	$\lambda_1, \lambda_2$	5, 1

位置外环、姿态内环总扰动观测值,如图 5,6 所示.图 5,6 中: $e_{D_1} \sim e_{D_6}$  为总扰动的观测误差.由图 5,6 可知:在位置外环、姿态内环中,模糊扩张状态观测器可以迅速地跟踪上外部的扰动,并且跟踪误差能迅速收敛至 0;此外,由于四旋翼的强耦合特性,在位置外环受到扰动时,姿态内环的观测误差也会受到一定的影响,但是观测误差也能在短时间波动后快速地恢复至 0.

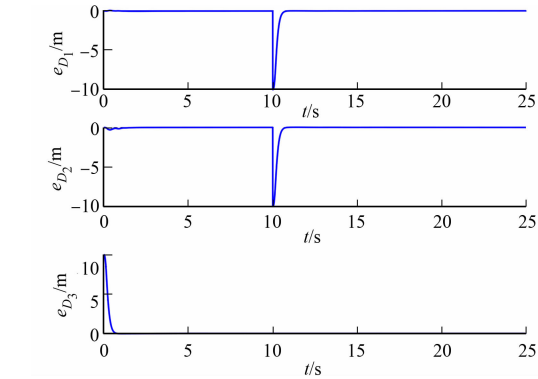


图 5 位置外环总扰动观测值  
Fig. 5 Total disturbances observed values of position outer loop

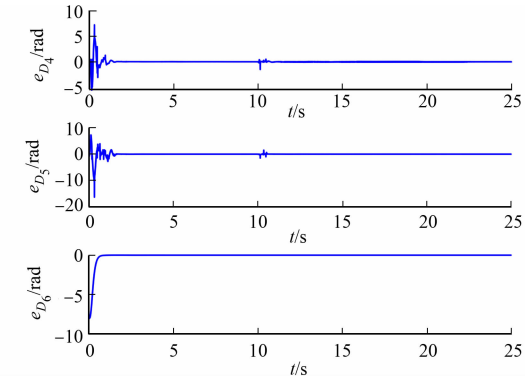


图 6 姿态内环总扰动观测值  
Fig. 6 Total disturbances observed values of attitude inner loop

由于模糊扩张状态观测器能快速、准确地获取总扰动的信息,因此,在与非奇异快速终端滑模控制器结合时,可以进一步提高非奇异快速终端滑模控制器的性能.四旋翼位置外环、姿态内环的跟踪误差对比,如图 7,8 所示.由图 7,8 可知:与模糊扩张状态观测器结合的控制方法可以更快速地收敛于期望值;即使在有扰动的情况下,使用观测器方法的控制器可以使跟踪误差收敛至 0;相较于单独使用非奇异快速终端滑模控制技术的控制器,在没有扰动的情况下,虽然最后跟踪误差会收敛至 0,但在收敛过程中有较大的波动值,而在有扰动的情况下,跟踪误差也难以收敛至 0;此外,相较于非奇异快速终端滑模控制器,终端滑模控制器的波动时间更长,收敛速度更慢,在四旋翼受到扰动时,终端滑模控制会产生较大的峰值,并且有明显的稳态跟踪误差.

3 种方法的轨迹跟踪性能对比曲线,如图 9 所示.由图 9 可知:使用模糊扩张状态观测器的控制器方案的控制性能更佳;所提控制策略可以更好地实现稳定的轨迹跟踪,证明了所提算法的优越性.



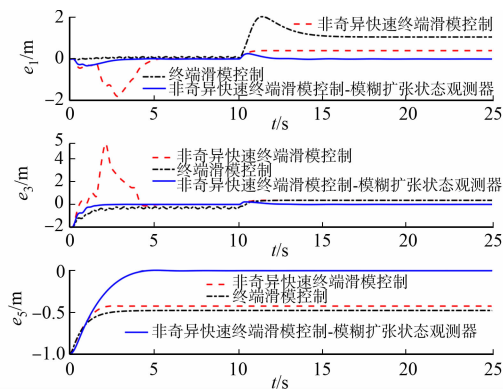


图 7 四旋翼位置外环跟踪误差对比

Fig. 7 Tracking errors comparison of quadrotor position outer loop

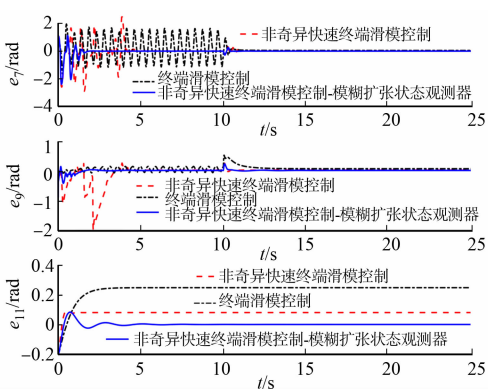


图 8 四旋翼姿态内环跟踪误差对比

Fig. 8 Tracking errors comparison of quadrotor attitude inner loop

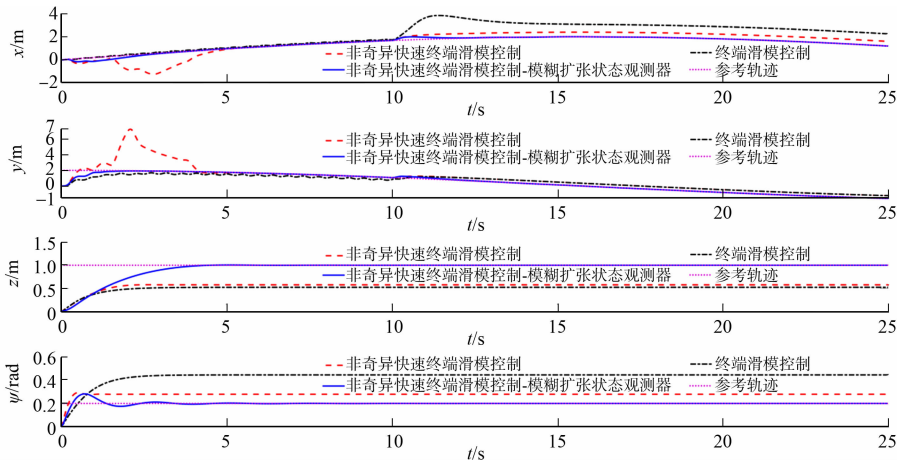


图 9 3 种方法的轨迹跟踪性能对比曲线

Fig. 9 Comparison curves of trajectory tracking performance of three methods

4 结束语

针对四旋翼无人机的轨迹跟踪问题,在双闭环的控制结构下,设计非奇异快速终端滑模控制器,确保四旋翼无人机的状态变量可以在有限时间内快速收敛,并且不会出现奇异问题.该滑模控制器利用模糊扩张状态观测器的观测值,可以快速获取准确的扰动信息并抵消扰动带来的不良影响,解决传统滑模控制设计中需已知扰动上界信息的难题,实现外部扰动干扰下的四旋翼的轨迹跟踪控制.仿真结果表明:所提的控制方案具有良好的轨迹跟踪控制性能,并且提高了四旋翼无人机控制系统的抗干扰性能.

参考文献:

[1] 黄志伟,徐苏楠,韦一,等. STM32 的多传感器融合姿态检测[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2015,36(4):422-426. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2015.04.0422.

[2] CAO Ning,LYNCH A F. Inner-outer loop control for quadrotor UAVs with input and state constraints[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology,2015,24(5):1797-1804. DOI:10.1109/TCST.2015.2505642.

[3] KOKSAL N,AN Hao,FIDAN B. Backstepping-based adaptive control of a quadrotor UAV with guaranteed tracking performance[J]. ISA Transactions,2020,105:98-110. DOI:10.1016/j.isatra.2020.06.006.

[4] 陶英杰,张维伟,马昕,等. 面向无人机视频分析的车辆目标检测方法[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2022,43(1):111-118. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202011014.

[5] GHADIOK V,GOLDIN J,REN Wei. On the design and development of attitude stabilization, vision-based navigation, and aerial gripping for a low-cost quadrotor[J]. Autonomous Robots,2012,33(1/2):41-68. DOI:10.1007/s10514-012-9286-z.



- [6] CAI Wenjing, SHE Jinhua, WU Min, *et al.* Disturbance suppression for quadrotor UAV using sliding-mode-observer-based equivalent-input-disturbance approach[J]. ISA Transactions, 2019, 92: 286-297. DOI: 10. 1016/j. isatra. 2019. 02. 028.
- [7] ANTONIO-TOLEDO M E, SANCHEZ E N, ALANIS A Y, *et al.* Real-time integral backstepping with sliding mode control for a quadrotor UAV[J]. IFAC-PapersOnLine, 2018, 51(13): 549-554. DOI: 10. 1016/j. ifacol. 2018. 07. 337.
- [8] LEE D, KIM H J, SASTRY S. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2009, 7(3): 419-428. DOI: 10. 1007/s12555-009-0311-8.
- [9] OKYERE E, BOUSBAINE A, POYI G T, *et al.* LQR controller design for quad-rotor helicopters[J]. The Journal of Engineering, 2019, 2019(17): 4003-4007. DOI: 10. 1049/joe. 2018. 8126.
- [10] YANG Hongjiu, CHENG Lei, XIA Yuanqing, *et al.* Active disturbance rejection attitude control for a dual closed-loop quadrotor under gust wind[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2017, 26(4): 1400-1405. DOI: 10. 1109/TCST. 2017. 2710951.
- [11] 郑佳静, 李平. 采用滑模观测器的四旋翼无人机执行器加性故障容错控制[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40(4): 437-443. DOI: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201810019.
- [12] ZHENG Enhui, XIONG Jingjing, LUO Jiliang. Second order sliding mode control for a quadrotor UAV[J]. ISA Transactions, 2014, 53(4): 1350-1356. DOI: 10. 1016/j. isatra. 2014. 03. 010.
- [13] XIONG Jingjing, ZHENG Enhui. Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV[J]. ISA Transactions, 2014, 53(3): 725-731. DOI: 10. 1016/j. isatra. 2014. 01. 004.
- [14] HOU Zhiwei, LU Peng, TU Zhangjie. Nonsingular terminal sliding mode control for a quadrotor UAV with a total rotor failure[J]. Aerospace Science and Technology, 2020, 98: 105716. DOI: 10. 1016/j. ast. 2020. 105716.
- [15] HUA Changchun, WANG Kai, CHEN Jiangnan, *et al.* Tracking differentiator and extended state observer-based nonsingular fast terminal sliding mode attitude control for a quadrotor[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 94(1): 343-354. DOI: 10. 1007/s11071-018-4362-3.
- [16] MOFID O, MOBAYEN S. Adaptive sliding mode control for finite-time stability of quad-rotor UAVs with parametric uncertainties[J]. ISA Transactions, 2018, 72: 1-14. DOI: 10. 1016/j. isatra. 2017. 11. 010.
- [17] LI Shushuai, WANG Yaonan, TAN Jianhao, *et al.* Adaptive RBFNNs/integral sliding mode control for a quadrotor aircraft[J]. Neurocomputing, 2016, 216: 126-134. DOI: 10. 1016/j. neucom. 2016. 07. 033.
- [18] MAQSOOD H, QU Yaohong. Nonlinear disturbance observer based sliding mode control of quadrotor helicopter[J]. Journal of Electrical Engineering and Technology, 2020, 15(3): 1453-1461. DOI: 10. 1007/s42835-020-00421-w.
- [19] 高俊山, 段立勇, 邓立为. 四旋翼无人机抗干扰轨迹跟踪控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 379-386. DOI: 10. 13195/j. kzyjc. 2019. 0875.
- [20] ZHOU Laihong, ZHANG Juqian, DOU Jingxin, *et al.* A fuzzy adaptive backstepping control based on mass observer for trajectory tracking of a quadrotor UAV[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2018, 32: 1675-1693. DOI: 10. 1002/acs. 2937.
- [21] NAGHDI M, SADRNI A M A. A novel fuzzy extended state observer[J]. ISA Transactions, 2020, 102: 1-11. DOI: 10. 1016/j. isatra. 2019. 07. 018.
- [22] BOUKATTAYA M, MEZGHANI N, DAMAK T. Adaptive nonsingular fast terminal sliding-mode control for the tracking problem of uncertain dynamical systems[J]. ISA Transactions, 2018, 77: 1-19. DOI: 10. 1016/j. isatra. 2018. 04. 007.
- [23] VAN M, GE Shuzhi, REN Hongliang. Finite time fault tolerant control for robot manipulators using time delay estimation and continuous nonsingular fast terminal sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(7): 1681-1693. DOI: 10. 1109/TCYB. 2016. 2555307.

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 吴逢铁)