第 44 卷 第 3 期
2023 年 5 月
华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Vol. 44 No. 3
May 2023

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202205018

双全纯映射的从属原理及其应用

邵俊霞,胡春英,王建飞

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 采用双曲度量的方法,给出多复变双全纯映射的从属原理.建立复平面上单连通区域 D 上的 Roper-Suffridge 算子,Roper-Suffridge 算子保持 β 型螺形映射.结果表明:当 $D=\Delta$ 为单位圆盘时,主要结果推广了先前已知的结果.

关键词: 多复变;双全纯映射;螺形映射;从属原理;Roper-Suffridge 算子

中图分类号: O 174.56 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2023)03-0417-04

Subordination Principle and Its Application of Biholomorphic Mappings

SHAO Junxia, HU Chunying, WANG Jianfei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Using hyperbolic metric method, we give the subordination principle of biholomorphic mappings in several complex variables, and establish Roper-Suffridge operators on simply connected domains D on complex planes, Roper-Suffridge operators preserve spirallike mappings of type β. The results show that when $D=\Delta$ is the unit disk, the main results generalize the previously known results.

Keywords: several complex variables; biholomorphic mapping; spirallike mapping; subordination principle; Roper-Suffridge operator

1 预备知识

记 Δ 为复平面 $\mathbf{C}$ 中的单位圆盘,即 $\Delta=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$.设 X 是复 Banach 空间,$\Omega\in X$ 为包含原点的区域,若 $f:\Omega\to X$ 是双全纯映射,满足 $f(0)=0, Df(0)=I$,其中,I 是 X 中的恒等算子,则称 f 为 Ω 上的正规化双全纯映射.记 $S(\Omega)$ 为 Ω 上的正规化双全纯映射全体.

设 $G\subsetneqq\mathbf{C}$ 为单连通区域,记 $\lambda_G(z)|\mathrm{d}z|$ 为 G 上的双曲度量.当 $G=\Delta$ 时,有

$$\lambda_\Delta(z)|\mathrm{d}z|=\frac{2|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2},\qquad z\in\Delta.$$

1995 年,Roper 等[1]引入 Roper-Suffridge 算子 $\Phi_{\frac{1}{2}}(f)(\boldsymbol{z})=F(\boldsymbol{z})=(f(z_1),\sqrt{f'(z_1)}\boldsymbol{z}_0)$,其中,$f$ 为 Δ 上的正规化局部双全纯函数,$\boldsymbol{z}=(z_1,\boldsymbol{z}_0)\in B^n$, $\boldsymbol{z}_0=(z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^{n-1}$,幂函数取 $\sqrt{f'(0)}=1$ 的解析单值分支.

Roper-Suffridge 算子可以保持一些重要的解析和几何特征,例如凸性、星形性和 Bloch 性质等.通

收稿日期: 2022-05-01
通信作者: 胡春英(1979-),女,讲师,主要从事复分析的研究.E-mail:huchunying_79@sina.com.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12071161, 11971165, 11971182);福建省自然科学基金资助项目(2020J01073, 2019J01066);福建省自然科学基金青年创新项目(2020J05157).

过Roper-Suffridge算子可构造出很多星形映射、凸映射和Bloch映射的具体实例[2-11].

2022年,王建飞等[7]利用文献[8]的结果,证明了Roper-Suffridge算子保持ε星形映射,从而得到定理A.

定理A[7] 设D是$\mathbf{C}$中包含原点的单连通区域且不等于$\mathbf{C}$,X是以$\|\cdot\|_X$为范数的复Banach空间.若f是D上的正规化双全纯ε星形函数,$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$,则

$$\Phi_{\frac{1}{r}}(f)(z,\boldsymbol{w})=F(z,\boldsymbol{w})=(f(z),(f'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w}),$$

是$\Omega_r(D)=\left\{(z,\boldsymbol{w})\in\mathbf{C}\times X:\|\boldsymbol{w}\|_X^r<\dfrac{1}{\lambda_D(z)}\right\}(r\geqslant 1)$上的正规化双全纯ε星形映射,$(z,\boldsymbol{w})\in\Omega_r(D)$,幂函数取$(f'(z))^{\frac{1}{r}}|_{z=0}=1$的解析单值分支.

文献[7]进一步给出了更一般的结论(定理B).

定理B[7] 设D是$\mathbf{C}$中包含原点的单连通区域且不等于$\mathbf{C}$,X_j是以$\|\cdot\|_{X_j}$为范数的复Banach空间,$j=2,\cdots,n$.如果f是D的正规化双全纯ε星形函数,$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$,则有

$$F(z,\boldsymbol{w})=(f(z),(f'(z))^{\frac{1}{r_2}}\boldsymbol{w}_2,\cdots,(f'(z))^{\frac{1}{r_n}}\boldsymbol{w}_n),$$

是$\Omega_{r_2,\cdots,r_n}(D)=:\left\{(z,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n)\in\mathbf{C}\times X_2\times\cdots\times X_n:\sum_{j=2}^{n}\|\boldsymbol{w}_j\|_{X_j}^{r_j}<\dfrac{1}{\lambda_D(z)}\right\}(r_2,\cdots,r_n\geqslant 1)$上的正规化双全纯ε星形映射,其中,$(z,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n)\in\Omega_{r_2,\cdots,r_n}(D)$,幂函数取$(f'(z))^{\frac{1}{r}}|_{z=0}=1$的解析单值分支.

星形映射、凸映射和螺形映射等函数类与从属关系具有密切的联系,通过多复变双全纯映射的从属原理,得到螺形映射的性质,需要引入定义1,定义2.

定义1[12-13] 设Ω为复Banach空间X中的区域,$0\in\Omega$. $F:\Omega\to X$,$G:\Omega\to X$为2个双全纯映射,如果存在Schwarz映射$V:\Omega\to\Omega$,$V(0)=0$,使得

$$F(\boldsymbol{z})=G(V(\boldsymbol{z})),\qquad \boldsymbol{z}\in\Omega,$$

那么称F从属于G,记作$F\prec G$.

定义2[13-14] 设Ω为复Banach空间X中的区域,$0\in\Omega$.若$F:\Omega\to X$是正规化双全纯映射,$|\beta|<\dfrac{\pi}{2}$且$\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})F(\boldsymbol{z})\in F(\Omega)$($\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})F\prec F$),$t\geqslant 0$,$\boldsymbol{z}\in\Omega$,称$F$为$\Omega$上的$\beta$型螺形映射.特别地,当$\beta=0$时,$F$即为$\Omega$上的正规化双全纯星形映射.

2 相关引理

为了证明主要结果,需要引入引理1,引理2.

引理1[15] 设$G_1\subsetneqq\mathbf{C}$,$G_2\subsetneqq\mathbf{C}$为两个单连通区域.如果$f:G_1\to G_2$为全纯函数,那么有

$$\lambda_{G_2}(f(z))|f'(z)|\leqslant\lambda_{G_1}(z),\qquad \forall z\in G_1.$$

引理2 设$D\subsetneqq\mathbf{C}$为包含原点的单连通区域,X是以$\|\cdot\|_X$为范数的复Banach空间.如果$f:D\to D$为双全纯函数,$f(0)=0$,那么有

$$\Phi_{\frac{1}{r}}(f)(z,\boldsymbol{w})=F(z,\boldsymbol{w})=(f(z),(f'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w}),$$

为$\Omega_r(D)=\left\{(z,\boldsymbol{w})\in\mathbf{C}\times X:\|\boldsymbol{w}\|_X^r<\dfrac{1}{\lambda_D(z)}\right\}(r\geqslant 1)$到$\Omega_r(D)$的双全纯映射,其中,幂函数取$(f'(z))^{\frac{1}{r}}|_{z=0}=1$的解析单值分支.

证明:由f为D上的双全纯函数可知,F为$\Omega_r(D)$上的双全纯函数.因$(z,\boldsymbol{w})\in\Omega_r(D)$,所以$\|\boldsymbol{w}\|_X^r<\dfrac{1}{\lambda_D(z)}$.由引理1可知

$$\begin{cases}\lambda_D(f(z))|f'(z)|\leqslant\lambda_D(z), & \forall z\in D,\\ |f'(z)|\leqslant\dfrac{\lambda_D(z)}{\lambda_D(f(z))}, & \forall z\in D.\end{cases}$$

于是有

$$\|(f'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w}\|_X^r=|f'(z)|\,\|\boldsymbol{w}\|_X^r<\frac{\lambda_D(z)}{\lambda_D(f(z))}\frac{1}{\lambda_D(z)}=\frac{1}{\lambda_D(f(z))}.$$

这表明 $F(z,\boldsymbol{w})\in\Omega_r(D)$.

3　主要结果及其证明

主要结果有定理 1，定理 2.

定理 1　设 $D\subsetneqq\mathbf{C}$ 为包含原点的单连通区域，若 $f,g\in S(D)$，则 $f\prec g$ 在 D 上成立当且仅当 $\Phi_{\frac{1}{r}}(f)\prec\Phi_{\frac{1}{r}}(g)$ 在 $\Omega_r(D)$ 上成立.

证明：若 $\Phi_{\frac{1}{r}}(f)\prec\Phi_{\frac{1}{r}}(g)$，则取 $\boldsymbol{w}=0$，即得 $f\prec g$. 反之，若 $f\prec g$ 在 D 上成立，则存在 Schwarz 函数 $v(z):D\to D$，$v(0)=0$，使得

$$f(z)=g(v(z)).$$

由于 $f,g\in S(D)$，有 $v=g^{-1}\circ f\in S(D)$. 因为有

$$\begin{cases}\Phi_{\frac{1}{r}}(f)(z,\boldsymbol{w})=(f(z),(f'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w})=(g(v(z)),(g'(v(z)))^{\frac{1}{r}}(v'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w}),\\ \Phi_{\frac{1}{r}}(v)=(v(z),(v'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w}),\end{cases}$$

从而有

$$\Phi_{\frac{1}{r}}(f)=\Phi_{\frac{1}{r}}(g)\circ\Phi_{\frac{1}{r}}(v).$$

应用引理 2，得 $\Phi_{\frac{1}{r}}(v):\Omega_r(D)\to\Omega_r(D)$ 为双全纯映射，且 $\Phi_{\frac{1}{r}}(0)=0$，故

$$\Phi_{\frac{1}{r}}(f)\prec\Phi_{\frac{1}{r}}(g).$$

定理 2　设 $D\subsetneqq\mathbf{C}$ 为包含原点的单连通区域，若 $f:D\to\mathbf{C}$ 为 β 型螺形映射，$|\beta|<\frac{\pi}{2}$，则有

$$\Phi_{\frac{1}{r}}(f)(z,\boldsymbol{w})=(f(z),(f'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w}),\qquad z,\boldsymbol{w}\in\Omega_r(D),\quad r\geqslant 1,$$

为 $\Omega_r(D)=\left\{(z,\boldsymbol{w})\in\mathbf{C}\times X:\|\boldsymbol{w}\|_X^r<\frac{1}{\lambda_D(z)}\right\}(r\geqslant 1)$ 上的 β 型螺形映射. 其中，幂函数取 $(f'(z))^{\frac{1}{r}}|_{z=0}=1$ 的解析单值分支.

证明：由 f 为 D 上的正规化双全纯映射可知，$\Phi_{\frac{1}{r}}(f)$ 为 $\Omega_r(D)$ 上的正规化双全纯映射. 应用定义 2，只需证明

$$\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})\Phi_{\frac{1}{r}}(f)\prec\Phi_{\frac{1}{r}}(f),\qquad t\geqslant 0$$

其中：$\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})\Phi_{\frac{1}{r}}(f)(z,\boldsymbol{w})=(\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})f(z),\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})(f'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w})$.

由于 f 在 D 上为 β 型螺形映射，从而有

$$g=\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})f\prec f.$$

于是有

$$\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})\Phi_{\frac{1}{r}}(f)(z,\boldsymbol{w})=(g(z),\exp(-t(1-\frac{1}{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})(g'(z))^{\frac{1}{r}}\boldsymbol{w})=(g(z),(g'(z))^{\frac{1}{r}}\tilde{\boldsymbol{w}}).$$

上式中：$\tilde{\boldsymbol{w}}=\exp(-t(1-\frac{1}{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})\boldsymbol{w}$.

由于 $(z,\boldsymbol{w})\in\Omega_r(D)$，$\|\tilde{\boldsymbol{w}}\|_X\leqslant\|\boldsymbol{w}\|_X$，从而有

$$(z,\tilde{\boldsymbol{w}})\in\Omega_r(D).$$

应用定理 1 及 $g\prec f$ 可知，

$$\exp(-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})\Phi_{\frac{1}{r}}(f)\prec\Phi_{\frac{1}{r}}(f),$$

这表明 $\Phi_{\frac{1}{r}}(f)$ 为 $\Omega_r(D)$ 上的 β 型螺形映射.

当 $D=\Delta$，$X=\mathbf{C}^{n-1}$，$\|\boldsymbol{w}\|_X=\|\boldsymbol{w}\|_p=(\sum_{j=2}^{n}|w_j|^p)^{\frac{1}{p}}$ 时，定理 2 即为文献[16]中的定理 1.5. 利用定理 2 的证明方法，以得到推论 1.

推论 1　设 $D\subsetneqq\mathbf{C}$ 为包含原点的单连通区域，X_j 是以 $\|\cdot\|_{X_j}$ 为范数的复 Banach 空间，$j=2,\cdots,n$. 若 $f:D\to\mathbf{C}$ 为 β 型螺形映射，$|\beta|<\frac{\pi}{2}$，则

$$\Phi_{\frac{1}{r_2},\cdots,\frac{1}{r_n}}(f)(z,w_2,\cdots,w_n)=(f(z),(f'(z))^{\frac{1}{r_2}}w_2,\cdots,(f'(z))^{\frac{1}{r_n}}w_n),$$

是 $\Omega_{r_2,\cdots,r_n}(D)=\left\{(z,w_2,\cdots,w_n)\in\mathbf{C}\times X_2\times\cdots\times X_n:\sum_{j=2}^{n}\|w_j\|_{X_j}^{r_j}<\frac{1}{\lambda_D(z)}\right\}(r_2,\cdots r_n\geqslant 1)$ 上的 β 型螺形映射,其中,幂函数取 $(f'(z))^{\frac{1}{r_j}}|_{z=0}=1$ 的解析单值分支.

参考文献:

[1] ROPER K A,SUFFRIDGE T J. Convex mappings on the unit ball of $\mathbf{C}^n$[J]. Journal d'Analyse Mathématique,1995,65(1):333-347. DOI:10.1007/BF02788776.

[2] GRAHAM I,KOHR G. Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator[J]. Journal d'Analyse Mathématique,2000,81(1):331-342. DOI:10.1007/BF02788995.

[3] GRAHAM I,HAMADA H,KOHR G,*et al*. Extension operators for locally univalent mappings[J]. The Michigan Mathematical Journal,2002,50(1):37-56. DOI:10.1307/mmj/1022636749.

[4] 胡春英,王建飞.单位球 B^n 上的改进的 Roper-Suffridge 算子[J].华侨大学学报(自然科学版),2020,41(6):829-834. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.202006022.

[5] 朱春丹,陈正新.上三角矩阵李代数的反交换映射[J]. 福建师范大学学报(自然科学版),2019,35(4):1-6. DOI:10.12046/j.issn.1000-5277.2019.04.001.

[6] 王洁,林珍连,王建飞. B^2 上 a 次殆星映射的一类有界构造[J].华侨大学学报(自然科学版),2020,41(1):126-129. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201904046.

[7] 王建飞,刘太顺,唐笑敏.双曲度量和 Roper-Suffridge 算子[J].中国科学(数学),2022,52(4):369-380. DOI:10.1360/SSM-2020-0243.

[8] WANG Jianfei,LIU Taishun. The Roper-Suffridge extension operator and its applications to convex mappings in C^2[J]. Transactions of the American Mathematical Society,2018,370(11):7743-7759. DOI:10.1090/tran/7221.

[9] CUI Yanyan,WANG Chaojun,LIU Hao. The generalized Roper-Suffridge operator on the unit ball in complex Banach and Hilbert spaces[J]. Acta Mathematica Scientia,2017,37(6):1817-1829. DOI:10.1016/S0252-9602(17)30109-1.

[10] ZHU Yucan,LIU Mingsheng. The generalized Roper-Suffridge extension operator in Banach spaces(Ⅲ)[J]. Science in China (Series A: Mathematics),2009,52(11):2432-2446. DOI:10.1007/s11425-009-0191-7.

[11] LIU Xiaosong. The generalized Roper-Suffridge extension operator for some biholomorphic mappings[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2006,324(1):604-614. DOI:10.1016/j.jmaa.2005.12.037.

[12] 史济怀.多复变函数论基础[M].北京,高等教育出版社,1996.

[13] BUCKHOLTZ J D,SUFFRIDGE T J. Complex analysis[M]. Berlin:Springer-Verlag,1977.

[14] 冯淑霞,刘太顺,任广斌.复 Banach 空间单位球上几类映射的增长掩盖定理[J].数学年刊 A 辑,2007,28(2):215-230. DOI:10.3321/j.issn:1000-8134.2007.02.007.

[15] BEARDON F,MINDA D. The hyperbolic metric and geometric function theory[C]//Proceedings of the International Quasiconformal Mappings and Their Applications. New Delhi:Narosa Publishing House,2007:9-56.

[16] WANG Jianfei,ZHANG Danli. Extension operators for biholomorphic mappings[J]. Canadian Mathematical Bulletin,2019,62(3):671-679. DOI:10.4153/CMB-2018-021-0.

(**责任编辑:** 陈志贤 **英文审校:** 黄心中)