

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.202312025



结构拓扑优化数值方法研究进展

石顺义, 郭新泽, 周克民

(华侨大学 土木工程学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 综述结构拓扑优化数值方法, 分析其主要发展趋势。根据不同近似参数比较两类主要优化方法, 基于材料的方法借助离散形式的参数描述材料分布场, 具有自由度高、描述能力强等优点, 基于几何的方法通过描述材料边界形成最优结构, 边界清晰且无需后处理。结果表明: 放松工程制造约束和提高求解效率是拓扑优化值得深入探索的研究方向, 具有广阔的应用前景。

关键词: 结构优化; 拓扑优化; 数值方法; 研究进展

中图分类号: TU 4

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2024)02-0150-08

Research Progress in Numerical Methods of Structural Topology Optimization

SHI Shunyi, GUO Xinze, ZHOU Kemin

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The numerical methods of structural topology optimization are reviewed, and the main trends of the methods are analyzed. By comparison of two main optimization methods based on different approximation parameters, the material-based method describing the material distribution field with the help of discrete form parameters, has the advantages of high degree of freedom and strong descriptive ability; the geometry-based method forming the optimal structure by describing the material boundary, has a clear boundary and does not require post-processing. The result show that relaxing the engineering manufacturing constraints and improving the efficiency of the solution are the research direction worthy of in-depth exploration in topology optimization, and have potential application prospects.

Keywords: structural optimization; topology optimization; numerical methods; research progress

结构优化是在给定的强度、刚度等约束条件下, 借助数学方法和计算机辅助工程(CAE)等技术手段, 自动生成满足工程需求的优化结构。相较于基于工程师经验的传统的试错法, 结构优化设计能够高效率、低成本地生成更加精确可靠的优化结构。

结构优化主要分为尺寸优化、形状优化和拓扑优化 3 个层次^[1]。其中, 尺寸优化以单个零件或组件中的尺寸参数为优化设计变量, 通常在细节设计阶段使用, 可以提高产品的可制造性; 形状优化通过改变结构的内外边界形状优化其性能和功能, 实现一些更复杂的设计优化, 如桁架的外形或板的开孔尺寸等; 拓扑优化通过改变桁架中杆的数量、连接关系或孔的数量等实现最佳的结构形式。

在结构尺寸和形状优化中, 首先, 建立明确、具体的参数化初始结构。然后, 将初始结构中的杆件横

收稿日期: 2023-12-12

通信作者: 周克民(1962-)男, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事计算力学、结构拓扑优化的研究。E-mail: zhoukm@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11572131); 福建省科技计划引导性项目(2019H0012)

截面尺寸、板厚、孔或连续体外形尺寸等参数作为优化设计变量,采用数学优化方法求解。然而,结构拓扑优化很难建立这样明确的参数化初始结构,甚至一般也很难参数化,这是结构拓扑优化的核心难点所在。解析方法虽然提出得更早,但是发展缓慢,通用性很差。因此,目前拓扑优化主要研究工作集中于数值优化方法。

结构拓扑优化适用于各类结构设计问题,已被成功应用于航空航天^[2]、建筑结构^[3]、增材制造^[4]等领域,展现出极高的应用潜力和实用价值。在过去几十年中,结构拓扑优化方法得到了广泛的研究和发展,本文主要介绍结构拓扑优化数值方法研究进展。

1 结构拓扑优化数值方法概述

结构拓扑优化数值方法通常包含 3 个主要部分。1) 建模。在设计域内构建近似描述结构拓扑的参数化数学优化模型,这些参数选择方法很大程度上影响了优化效率和结果。拓扑优化数值方法分类也是基于此进行区分的。2) 分析。采用有限元等结构分析数值方法进行结构分析,求得当前结构的响应。3) 优化。通过数学寻优算法,对数学优化模型中的参数进行优化,使目标函数值收敛至最小值,从而得到满足设计需求的优化结构拓扑。

根据结构拓扑近似参数化表达方式不同,结构拓扑优化数值方法主要可以分为基于材料和基于几何两类。基于材料的方法往往遵循“由部分到整体”的思路,它主要选取与材料相关的属性作为优化变量,如材料密度、弹性模量和弹性矩阵中的元素等,通过优化设计域内材料属性分布确定优化拓扑结构。基于材料的方法通用性好、设计自由度高,能够适应各种复杂设计区域。与基于材料的方法不同,基于几何的方法采用“由外到内”的思想,它从描述结构的边界入手,通过优化设计域中结构的几何边界,实现从结构边界定义整个结构。基于几何的方法设计变量规模小、边界清晰、可制造性好。

2 拓扑优化数值方法对比分析

2.1 基于材料的拓扑优化数值方法

在连续体结构拓扑优化数值方法中,以材料属性为参数描述结构拓扑是较为经典和有效的研究思路。由于描述形式简单、设计自由度高、通用性好,基于材料的拓扑优化数值方法发展最早并得到普遍应用。基于材料的方法主要有均匀化方法、固体各向同性惩罚方法、渐进结构优化方法、独立连续映射方法、自由材料方法和基于类桁架材料模型的优化方法等。

2.1.1 均匀化方法 1981 年,程耿东^[5]研究变厚度板的最大刚度问题,发现最优解的非光滑性及网格依赖问题,这是近代拓扑优化问题的奠基性工作。1988 年,Bendsøe 等^[6]提出具有里程碑意义的均匀化拓扑优化方法,为连续体结构拓扑优化提供了计算框架。在极限情况下,结构拓扑优化可以理解在设计域内每一点的材料有无问题。然而,由于这种离散化问题难以求解,均匀化方法将该问题转化为连续体材料分布问题^[7]进行求解。该方法引入材料密度函数,考虑了一种复合材料,该复合材料由一个无限数量的无限小孔洞的周期性复合材料组成,将结构拓扑优化问题转化为尺寸优化问题。引入上述多孔材料的方式并不唯一,目前可以分为层压板复合方法和具有内部空隙的微细胞结构两类,利用均质化理论可以确定这些材料的宏观力学性能。

Díaz 等^[8]提出一种基于权重因子的均匀化方法,解决弹性结构的多工况和最大频率优化问题。Olhoff 等^[9]发展了基于交互式计算机辅助设计(CAD)的工程设计优化系统基本概念,提出优化机械部件的拓扑结构、形状和尺寸的方法。Sigmund^[10]借助均匀化方法,提出一种构造任意半正定本构张量材料的有效方法。构造问题被表述为在给定本构参数下寻找最轻微观结构的反问题。均匀化方法中对复合材料的优化结果进行后处理^[11]也非常重要。Groen 等^[12-13]提出一种从粗糙的均匀化拓扑优化结果中获得高分辨率、可制造结构的投影方法,并被拓展到三维问题^[14]、多工况^[15]和流线场^[16]等方面。均匀化方法采用一种参数化的具有各向异性材料特性的多孔周期性微观结构材料模型,能最大限度地逼近理论最优解,成为连续体拓扑优化的开创性理论。复杂的材料均匀化理论增加了优化问题求解难度。

2.1.2 固体各向同性惩罚方法 在均匀化方法引入拓扑优化后不久,Bendsøe^[7]和其他学者^[17]提出了

带惩罚的固体各向同性微结构优化方法(SIMP)^[18]。该方法最初作为一种简单的方式用以降低均匀化方法的复杂性,并提高 0-1 解的收敛性。后来 Bendsøe 等^[18]给出 SIMP 的物理证明。在 SIMP 方法中,密度设计变量与材料性能之间的关系由幂函数形式给出,即

$$E(\rho_i)=g(\rho_i)E_0=\rho_i^pE_0,\quad g(\rho_i)=\rho_i^p.\tag{1}$$

式(1)中: p 为惩罚参数; E_0 为固体材料的杨氏模量; ρ_i 为第 i 个单元密度。

对于 $p=1$,优化问题对应于“变厚度板”问题。实际上,最小柔度问题是一个具有唯一解的凸问题^[1]。对于 $p>1$,不利于中等厚度或密度,但有利于 0-1 解。当 p 过低时,会导致灰色尺度过大;当 p 过高时,则会导致收敛到局部极小值的速度过快;当 $p=3$ 时,能够确保良好收敛到几乎 0-1 解。

为了缓解原始 SIMP 插值方案的非凸性,Stolpe 等^[19]引入材料属性的合理近似模型(RAMP)方法,从而确保收敛到 0-1 解。罚函数的引入常常会导致网格依赖、棋盘格等数值不稳定问题。在最小柔度问题中,Guest 等^[20]讨论了一种简单的线性投影格式和一种使用正则化 Heaviside 阶跃函数,以实现近 0-1 解的非线性格式,通过对尺度的直接控制,提高数值计算的稳定性。Sigmund^[21]提出基于形态的密度滤波拓扑优化方案,给出一种网格无关、离散和可制造的解决方案。程耿东^[22]最早指出应力约束奇异最优解和其余可行区通过可行的线段相连通。在桁架拓扑优化问题中,Guo 等^[23]利用二阶光滑扩展技术使不相交的可行域连通,再利用松弛法消除最优解的奇异性。SIMP 方法的优势在于模型和计算机编程实现简单、通用性强,能够实现清晰的 0-1 结构,已在几何非线性^[24]、柔性结构^[25]和带隙材料^[26]等方面得到了应用。由于有限单元格的离散特性,优化结构边界呈现锯齿状,数值不稳定问题的处理手段比较繁琐。

2.1.3 渐进结构优化方法 随着时间的推移,物种通常朝着更加适应环境的最优状态演化。这个想法最早由 Xie 等^[27]在 1993 年用于结构优化,并被称为渐进结构优化(ESO)方法^[27]。ESO 方法最初应用于自然结构(如骨骼),这种结构的最佳拓扑和形状随着时间的推移,遵循进化路径得以实现。早期的 ESO 方法仅限于从结构中去掉材料,初始模型必须明显过度设计,如果过早地去除结构,则无法恢复。为了克服这一问题,Querin 等^[28]开发了一种早期 ESO 方法的改进模型,称为双向 ESO(BESO),这种技术允许单元重新添加到结构中。Young 等^[29]将该方法进一步扩展到三维结构。Zhou 等^[30]在 2001 年研究了 ESO/BESO 技术,认为这两种方法不能总是保证最优设计。Sigmund 等^[31]指出,ESO/BESO 的程序不容易扩展到其他约束条件(如位移约束)。在 Rozvany 和 Zhou 的早期批评之后,Zhu 等^[32]开发了一种改进的 BESO 方法,用一种单元可替换方法来更好地表示单元状态。Huang 等^[33]也提出一种新的 BESO 技术,该技术已被证明可以产生收敛解,这种改进包括利用单元的历史信息来提高单元灵敏度的准确性。ESO 方法的许多发展都来自于对算法能够高效地找到最优解的批评,这促进了“Soft Killing”ESO/BESO 技术的发展^[34]。渐进结构优化方法材料模型简单,在国内外得到了充分的关注和发展,但该方法独有的一些特点使其对于复杂约束问题的适用性较为有限。

2.1.4 独立连续映射方法 为了统一描述拓扑变量,1998 年,Sui 等^[35]将拓扑变量从依附于截面积、厚度等尺寸优化低层次变量上分离出来,成为独立的层次,提出独立连续映射法(ICM)^[35]。ICM 通过定义独立拓扑变量并运用函数逼近理论,对阶跃函数及其逆函数实现连续可导化的逼近。这使其能够使用基于连续变量的优化模型来解决原本离散的大规模优化问题。经过多年的发展,构建了位移和屈曲约束^[36]、频率约束^[37]等问题求解模型,拓展了三维连续体拓扑优化设计^[38]。

2.1.5 自由材料方法 在 20 世纪 90 年代早期,Bendsøe 等^[39]提出自由材料优化(FMO)方法。该方法选取弹性张量中的所有分量作为设计变量,它们是位置的函数。这些分量除了满足材料在物理上可行,其他方面不受限制。该方法能够给出物理上可能获得的最佳材料,被认为是结构优化问题的“终极”一般化。基于自由材料优化方法,Kočvara 等^[40]及 Haslinger 等^[41]研究了局部应力约束和位移约束问题。Stingl 等^[42]提出并解决了具有基本特征频率约束的问题。Weldeyesus 等^[43]通过扩展文献[44]中的公式,提出新的层合板和壳结构的 FMO 模型。此外,该方法也被用于多尺度结构优化中^[45]。尽管 FMO 方法能够得到较为精确的最优结构,但该模型的设计变量个数会随着有限元精度的增加而变得规模巨大,这将大幅增加优化问题的求解难度,且优化结构的材料可能并不对应真实工程材料。

2.1.6 基于类桁架材料模型的优化方法 基于类桁架材料模型的优化方法^[46]根据拓扑优化结构理论

解建立一种不均匀各向异性“类桁架”材料模型,保持了基于密度的优化方法的高效性。该方法首先优化类桁架材料分布场,对密度不作等厚度限制,也不罚中间密度,能够形成非常接近解析解的变刚度类桁架结构,同时避免许多拓扑优化数值方法普遍存在的“棋盘格”现象、网格依赖和局部极值等一系列数值不稳定问题。在此基础上,对优化类桁架材料分布场进行处理,可以形成满足工程需求的离散优化结构或带孔连续体。经过多年的发展,该方法可以解决柔度问题^[47]、频率问题^[48]、应力约束问题^[49]、质量最小格栅结构^[46]和不确定荷载^[50]等拓扑优化问题及一些具体的工程应用^[51]。

2.2 基于几何特征的拓扑优化数值方法

2.2.1 水平集法 Osher 等^[52]最早引入水平集法(LSM)^[53],该方法利用函数的零水平集来定义结构边界,通过进化隐式水平集方程形成优化拓扑结构,将水平集概念用于模拟移动边界。当时水平集法主要用于模拟多相流体中界面的演化^[54]和图像分割^[55]。1998 年,Haber 等^[56]在拓扑优化中使用水平集的概念描述几何。Ruiter 等^[57]几乎同时开始研究基于水平集的结构拓扑优化方法。水平集法构建了一个高维度的水平集函数,用该水平集函数与零平面的交线来描述材料的边界。通常情况下,水平集函数通过 Hamilton-Jacobi 方程的解进行更新,即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V |\nabla \varphi| = 0。 \quad (2)$$

式(2)中: t 为伪时间,表示优化过程中设计的演变; V 为所谓的速度函数,或速度场; φ 为水平集函数。

传统的水平集法只能从现有的边界演变而来,无法在固体材料包围的二维空间中生成新孔。虽然基于启发式和拓扑灵敏度信息的孔洞生成技术可以缓解这些缺陷,但在优化过程引入新孔洞通常需要附加步骤,这影响了优化过程的收敛性。收敛性进一步受到边界附近水平集函数空间梯度的强烈影响。通常情况下,水平集法的结果强烈依赖于初始假设。为了解决以上问题,Wei 等^[58]提出分段常数水平集法,用不连续的分段常数水平集函数来描述边界。Otomori 等^[59]基于目标函数的拓扑导数,通过求解反应扩散方程来更新水平集函数。Wei 等^[60]采用径向基函数的参数化水平集法,在优化过程中以近似的重新初始化方案保持相对平滑的水平集函数,它能够在材料域内形成新孔,对初始设计的依赖性也较小。上述方法一定程度地克服了传统水平集法的一些不足,但大量公式和重新初始化的需要表明存在尚未解决的问题,如正则化、水平集函数的空间梯度控制等。

2.2.2 移动部件类方法 在水平集法边界清晰光滑的基础上,为进一步简化拓扑边界的描述形式,Guo 等^[61]提出移动变形组件/孔洞(MMC/MMV)法^[62],将结构拓扑看作是有限数量的移动变形组件的组合,并通过控制移动部件或孔洞间接实现材料分布场的拓扑变化。该方法出发点是任何类型的拓扑结构都可以分解为有限数量的组件,因此,它将“结构构件”作为拓扑优化的基本构件,通过最优性条件确定构件的形状、长度、厚度、朝向等几何特征参数及布局(连通性),从而得到最优结构拓扑。Zhang 等^[63]引入一组可变形的三维构件描述三维拓扑结构,并通过显式优化构件的布局寻找最优结构。通过几何设计变量设置下界^[64],移动组件法解决了最小长度尺度控制问题。Zhang 等^[65]采用 B 样条曲线描述结构中移动变形构件的边界,这可以保持结构边界的平滑,通过显式的边界描述和演化可以同时获得结构的形状和拓扑。从相反的角度,Zhang 等^[66]提出一种与 MMC 法互为对偶的 MMV 法,引入一组几何参数显式地描述孔洞的边界,减少与优化问题相关的设计变量的总数,还提供了通过有效的单元移除技术大幅减少有限元自由度数量的可能性。MMC/MMV 法借助部件形式的材料模型减小了设计变量的数量,提高了优化效率,而且显式的边界描述也有助于进一步与 CAD 技术的结合。然而,模块化的部件数量和初始位置的设置会对最终优化结果产生影响,面对复杂的拓扑构型,该方法容易出现部件描述能力不足的问题。

与 MMC/MMV 方法类似,Wei 等^[67]提出的刚度扩散法是一种桁架的结构布局优化方法,该方法将桁架结构杆单元的刚度矩阵用一组嵌入弱背景网格的等效刚度矩阵表示。桁架结构中的杆件在优化过程中不需要相互连接,每个杆件都可以在设计域中独立运动,通过优化可以形成最优桁架设计。

Norato 等^[68]提出几何投影方法,优化固定宽度和半圆形末端的杆件组成的线性弹性平面结构。该方法通过使用可微分几何投影,将设计投影到固定的分析网格上,避免设计更改时的网格重新划分,该投影产生密度场指示设计空间中任意位置的固体材料的分数。类似的方法还有泡泡法^[69]等。

3 结论

以上两类优化方法特点不同,求解优化问题时各有优劣。面向工程需求,两类方法都能够生成基本可用的优化结构。值得一提的是,Michell 桁架解析解^[70]一直以来就是数值优化方法比较的基准。从解析解来看,Michell 桁架是一种基于梁单元(或称为类桁架杆单元)的精细网^[71],即所谓的连续体结构。将 Michell 桁架解析解作为离散框架结构并不准确。拓扑优化结构限制为刚架或带孔连续体结构是为了适应工程应用需要,这导致优化结果并非最优。在低体积分数约束下存在优化的桁架结构、基于 n 阶层合板均匀化的拓扑优化^[7]、带孔板等 3 种优化问题的结果,它们的广义形状都会变得像 Michell 桁架解析解^[72]。因此,真正的最优结构是变厚度,或者非均匀各向异性连续体。

为满足制造需求,上述优化方法大多以直接得到边界清晰的宏观等厚度带孔结构为目标,往往采用各向同性材料限制。这种等厚度各向同性材料设定可以理解为对优化结果的一种约束,它会导致优化结果与理论上的最优解相差较大。对比不同优化方法的结果^[71]可知,通过允许变厚度而不强制等厚度带孔板,在实际情况下,结构性能改进超过 30%。显然,与解析解相比,非最优结构在性能上的损失很难忽视。随着工业制造水平的快速发展,一些变刚度复合材料使一些人造材料的实现成为可能。因此,以更高精度的拓扑优化结果为目标,发展更加高效的数值拓扑优化方法是当前一个重要的研究方向。

基于几何特征的几种数值优化方法中,主要通过描述宏观尺度下材料的边界构建拓扑最优结构。这种方式的优点是结构边界清晰,无需后处理,设计变量相对较少,便于工程应用。然而,面对复杂的优化问题,设计变量与目标函数之间较强的非线性关系增加了优化求解的难度,基于部件的材料场描述方式比离散形式的材料类方法更难描述复杂拓扑结构。

参考文献:

- [1] BENDSØE M P, SIGMUND O. Topology optimization: Theory, methods, and applications[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2003.
- [2] ZHU Jihong, ZHANG Weihong, XIA Liang. Topology optimization in aircraft and aerospace structures design[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2016, 23(4): 595-622. DOI: 10. 1007/s11831-015-9151-2.
- [3] XIONG Yulin, ZHAO Zilong, LU Hongjia, *et al.* Parallel BESO framework for solving high-resolution topology optimization problems[J]. Advances in Engineering Software, 2023, 176: 103389. DOI: 10. 1016/j. advengsoft. 2022. 103389.
- [4] VANEK J, GALICIA J A G, BENES B. Clever support: Efficient support structure generation for digital fabrication[J]. Computer Graphics Forum, 2014, 33(5): 117-125. DOI: 10. 1111/cgf. 12437.
- [5] 程耿东. 实心弹性薄板的最优设计[J]. 大连工学院学报, 1981, 20(2): 1-11.
- [6] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197-224. DOI: 10. 1016/0045-7825(88) 90086-2.
- [7] BENDSØE M P. Optimal shape design as a material distribution problem[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 1989, 1(4): 193-202. DOI: 10. 1007/BF01650949.
- [8] DÍAZ A R, BENDSØE M P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 1992, 4(1): 17-22. DOI: 10. 1007/BF01894077.
- [9] OLHOFF N, BENDSØE M P, RASMUSSEN J. On CAD-integrated structural topology and design optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 89(1): 259-279. DOI: 10. 1016/0045-7825(91) 90044-7.
- [10] SIGMUND O. Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem[J]. International Journal of Solids and Structures, 1994, 31(17): 2313-2329. DOI: 10. 1016/0020-7683(94)90154-6.
- [11] PANTZ O, TRABELSI K. A post-treatment of the homogenization method for shape optimization[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2008, 47(3): 1380-1398. DOI: 10. 1137/070688900.
- [12] GROEN J P, WU Jun, SIGMUND O. Homogenization-based stiffness optimization and projection of 2D coated structures with orthotropic infill[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 349: 722-

742. DOI:10.1016/j.cma.2019.02.031.
- [13] GROEN J P, SIGMUND O. Homogenization-based topology optimization for high-resolution manufacturable microstructures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, 113(8): 1148-1163. DOI:10.1002/nme.5575.
- [14] GROEN J P, STUTZ F C, AAGE N, *et al.* De-homogenization of optimal multi-scale 3D topologies[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 364: 112979. DOI:10.1016/j.cma.2020.112979.
- [15] JENSEN P D L, SIGMUND O, GROEN J P. De-homogenization of optimal 2D topologies for multiple loading cases[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 399: 115426. DOI:10.1016/j.cma.2022.115426.
- [16] WANG Junpeng, WESTERMANN R, WU Jun. A streamline-guided de-homogenization approach for structural design[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2022, 145(2): 21702. DOI:10.1115/1.4056148.
- [17] ZHOU Ming, ROZVANY G I N. The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 89(1): 309-336. DOI:10.1016/0045-7825(91)90046-9.
- [18] BENDSØE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69(9): 635-654. DOI:10.1007/s004190050248.
- [19] STOLPE M, SVANBERG K. On the trajectories of penalization methods for topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2): 128-139. DOI:10.1007/s001580050177.
- [20] GUEST J K, PRÉVOST J H, BELYTSCHKO T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(2): 238-254. DOI:10.1002/nme.1064.
- [21] SIGMUND O. Morphology-based black and white filters for topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4): 401-424. DOI:10.1007/s00158-006-0087-x.
- [22] 程耿东. 关于桁架结构拓扑优化中的奇异最优解[J]. *大连理工大学学报*, 2000, 40(4): 379-383. DOI:10.3321/j.issn:1000-8608.2000.04.001.
- [23] GUO Xu, CHENG Gengdong, YAMAZAKI K. A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 22(5): 364-373. DOI:10.1007/s00158-001-0156-0.
- [24] BUHL T, PEDERSEN C B W, SIGMUND O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2000, 19(2): 93-104. DOI:10.1007/s001580050089.
- [25] SIGMUND O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization[J]. *Mechanics of Structures and Machines*, 1997, 25(4): 493-524. DOI:10.1080/08905459708945415.
- [26] BONNECAZE R T, RODIN G J, SIGMUND O, *et al.* Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2003, 361(1806): 1001-1019. DOI:10.1098/rsta.2003.1177.
- [27] XIE Yimin, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. *Computers & Structures*, 1993, 49(5): 885-896. DOI:10.1016/0045-7949(93)90035-C.
- [28] QUERIN O M, STEVEN G P, XIE Yimin. Evolutionary structural optimization (ESO) using a bidirectional algorithm[J]. *Engineering Computations*, 1998, 15(8): 1031-1048. DOI:10.1108/02644409810244129.
- [29] YOUNG V, QUERIN O M, STEVEN G P, *et al.* 3D and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1999, 18(2): 183-192. DOI:10.1007/BF01195993.
- [30] ZHOU Ming, ROZVANY G I N. On the validity of ESO type methods in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(1): 80-83. DOI:10.1007/s001580050170.
- [31] SIGMUND O, PETERSSON J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1998, 16(1): 68-75. DOI:10.1007/BF01214002.
- [32] ZHU Jihong, ZHANG Weihong, QIU Kepeng. Bi-directional evolutionary topology optimization using element replaceable method[J]. *Computational Mechanics*, 2007, 40(1): 97-109. DOI:10.1007/s00466-006-0087-0.

- [33] HUANG Xiaodong, XIE Yimin. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, 43(14): 1039-1049. DOI: 10.1016/j.finel.2007.06.006.
- [34] DEATON J D, GRANDHI R V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49(1): 1-38. DOI: 10.1007/s00158-013-0956-z.
- [35] SUI Yunkang, YANG Deqing. A new method for structural topological optimization based on the concept of independent continuous variables and smooth model[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 14(2): 179-185. DOI: 10.1007/BF02487752.
- [36] 隋允康, 张学胜, 龙连春, 等. 位移约束集成化处理的连续体结构拓扑优化[J]. *固体力学学报*, 2006, 27(1): 102-107. DOI: 10.3969/j.issn.0254-7805.2006.01.018.
- [37] 彭细荣, 隋允康. 有频率禁区的连续体结构拓扑优化[J]. *固体力学学报*, 2007, 28(2): 145-150. DOI: 10.3969/j.issn.0254-7805.2007.02.006.
- [38] 叶红玲, 隋允康. 基于 ICM 方法三维连续体结构拓扑优化[J]. *固体力学学报*, 2006, 27(4): 387-393. DOI: 10.3969/j.issn.0254-7805.2006.04.011.
- [39] BENDSØE M P, GUEDES J M, HABER R B, *et al.* An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1994, 61(4): 930-937. DOI: 10.1115/1.2901581.
- [40] KOČVARA M, STINGL M, ZOWE J. Free material optimization: Recent progress[J]. *Optimization*, 2008, 57(1): 79-100. DOI: 10.1080/02331930701778908.
- [41] HASLINGER J, KOČVARA M, LEUGERING G, *et al.* Multidisciplinary free material optimization[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2010, 70(7): 2709-2728. DOI: 10.1137/090774446.
- [42] STINGL M, KOČVARA M, LEUGERING G. Free material optimization with fundamental eigenfrequency constraints[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2009, 20(1): 524-547. DOI: 10.1137/080717122.
- [43] WELDEYESUS A G, STOLPE M. Free material optimization for laminated plates and shells[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53(6): 1335-1347. DOI: 10.1007/s00158-016-1416-3.
- [44] GAILE S, GÜNTHER L, STINGL M. Free material optimization for plates and shells[C] // IFIP Conference on System Modeling and Optimization. Cracow: [s. n.], 2007: 239-250. DOI: 10.1007/978-3-642-04802-9_12.
- [45] HU Jingqiao, LI Ming, YANG Xingtong, *et al.* Cellular structure design based on free material optimization under connectivity control[J]. *Computer-Aided Design*, 2020, 127: 102854. DOI: 10.1016/j.cad.2020.102854.
- [46] ZHOU Kemin. Optimization of least-weight grillages by finite element method[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 38(5): 525-532. DOI: 10.1007/s00158-008-0305-9.
- [47] ZHOU Kemin, LI Xia. Topology optimization for minimum compliance under multiple loads based on continuous distribution of members[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 37(1): 49-56. DOI: 10.1007/s00158-007-0214-3.
- [48] ZHOU Kemin. Topology optimization of truss-like continuum structures for natural frequencies[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2012, 47(4): 613-619. DOI: 10.1007/s00158-012-0870-9.
- [49] CUI Hao, ZHOU Kemin. Topology optimization of truss-like structure with stress constraints under multiple-load cases[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2019, 33(2): 226-238. DOI: 10.1007/s10338-019-00125-3.
- [50] 乔升访, 周克民. 基于类桁架材料模型的不确定荷载下结构拓扑优化[J]. *工程力学*, 2016, 33(1): 252-256.
- [51] CUI Hao, ZHOU Kemin, YANG Zhiyi. Reinforcement layout design of RC structures under multiple load cases using truss-like material model[J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2020, 17(4): 1-17. DOI: 10.1590/1679-78255930.
- [52] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49. DOI: 10.1016/0021-9991(88)90002-2.
- [53] SETHIAN J A. Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 169(2): 503-555. DOI: 10.1006/jcph.2000.6657.
- [54] SUSSMAN M, SMERKA P, OSHER S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase

- flow[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(1): 146-159. DOI: 10. 1006/jcph. 1994. 1155.
- [55] MALLADI R, SETHIAN J A, VEMURI B C. Shape modeling with front propagation: A level set approach[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(2): 158-175. DOI: 10. 1109/34. 368173.
- [56] HABER R, BENDSOE M. Problem formulation, solution procedures and geometric modeling-key issues in variable-topology optimization[C]//7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. Reston: AIAA, 1998: 4948.
- [57] RUITER M J D, KEULEN F V. Topology of optimization: Approaching the material distribution problem using a topological function description[C]//Computational Techniques for Materials, Composites and Composite Structures. Edinburgh: Civil-Comp Press, 2000: 111-119.
- [58] WEI Peng, WANG M Y. Piecewise constant level set method for structural topology optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 78(4): 379-402. DOI: 10. 1002/nme. 2478.
- [59] OTOMORI M, YAMADA T, IZUI K, *et al.* Matlab code for a level set-based topology optimization method using a reaction diffusion equation[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015, 51(5): 1159-1172. DOI: 10. 1007/s00158-014-1190-z.
- [60] WEI Peng, LI Zuyu, LI Xueping, *et al.* An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method-based topology optimization using radial basis functions[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 58(2): 831-849. DOI: 10. 1007/s00158-018-1904-8.
- [61] GUO Xu, ZHANG Weisheng, ZHANG Jian, *et al.* Explicit structural topology optimization based on moving morphable components (MMC) with curved skeletons[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 310: 711-748. DOI: 10. 1016/j. cma. 2016. 07. 018.
- [62] ZHANG Weisheng, LI Dong, ZHOU Jianhua, *et al.* A Moving Morphable Void (MMV)-based explicit approach for topology optimization considering stress constraints[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 334: 381-413. DOI: 10. 1016/j. cma. 2018. 01. 050.
- [63] ZHANG Weisheng, LI Dong, YUAN Jie, *et al.* A new three-dimensional topology optimization method based on moving morphable components (MMCs) [J]. Computational Mechanics, 2016, 59(4): 647-665. DOI: 10. 1007/s00466-016-1365-0.
- [64] ZHANG Weisheng, LI Dong, ZHANG Jie, *et al.* Minimum length scale control in structural topology optimization based on the moving morphable components (MMC) approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 311: 327-355. DOI: 10. 1016/j. cma. 2016. 08. 022.
- [65] ZHANG Weisheng, YANG Wanying, ZHOU Jianhua, *et al.* Structural topology optimization through explicit boundary evolution[J]. Journal of Applied Mechanics, 2016, 84(1): 1-10. DOI: 10. 1115/1. 4034972.
- [66] ZHANG Weisheng, CHEN Jishun, ZHU Xuefeng, *et al.* Explicit three dimensional topology optimization via moving morphable void (MMV) approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 322: 590-614. DOI: 10. 1016/j. cma. 2017. 05. 002.
- [67] WEI Peng, MA Haitao, WANG M. The stiffness spreading method for layout optimization of truss structures[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 49(4): 667-682. DOI: 10. 1007/s00158-013-1005-7.
- [68] NORATO J A, BELL B K, TORTORELLI D A. A geometry projection method for continuum-based topology optimization with discrete elements[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 293: 306-327. DOI: 10. 1016/j. cma. 2015. 05. 005.
- [69] ESCHENAUER H A, KOBELEV V V, SCHUMACHER A. Bubble method for topology and shape optimization of structures[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 1994, 8(1): 42-51. DOI: 10. 1007/bf01742933.
- [70] PRAGER W, ROZVANY G I N. Optimal layout of grillages[J]. Journal of Structural Mechanics, 1977, 5(1): 1-18. DOI: 10. 1080/03601217708907301.
- [71] SIGMUND O, AAGE N, ANDREASSEN E. On the (non-)optimality of Michell structures[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 54(2): 361-373. DOI: 10. 1007/s00158-016-1420-7.
- [72] ROZVANY G I N, ONG T G, SZETO W T, *et al.* Least-weight design of perforated elastic plates: I [J]. International Journal of Solids and Structures, 1987, 23(4): 521-536. DOI: 10. 1016/0020-7683(87)90015-1.